

LICEUM
OGÓLNOKSZTAŁCĄCE

MATEMATYKA

Henryk Pawłowski

3

ZAKRES ROZSZERZONY
Podręcznik



OPERON

OPERON

SERIA SZKOŁA
XXI

Henryk Pawłowski

MATEMATYKA 3

ZAKRES ROZSZERZONY

Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego



Podręcznik posiada certyfikat
Polskiego Towarzystwa Matematycznego

 **OPERON**

Gdynia 2007

Konsultacja naukowa: *dr hab. Edward Tutaj, dr hab. Maria Korcz*

Projekt okładki: *Krzysztof Godlewski*

Redaktor prowadzący: *Sebastian Przybyszewski*

Redakcja: *Elżbieta Pałasz*

Redakcja graficzna i skład: *Jacek Papis*

Korekta techniczna: *Agata Bugiel, Anna Wierzchowska*

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki (w zakresie rozszerzonym) na poziomie liceum ogólnokształcącego, na podstawie opinii rzeczoznawców: mgr. Zbigniewa Bobińskiego, mgr Kingi Gałązki, dr. Michała Krycha, dr. Piotra Zbróga.

Numer dopuszczenia 198/04

© Copyright by Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON Sp. z o.o. & Henryk Pawłowski
Gdynia 2005

Wszelkie prawa zastrzeżone. Kopiowanie w całości lub we fragmentach bez zgody wydawcy
zabronione.

9-7/XIII

Wydawca:

Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON Sp. z o.o.

81-212 Gdynia, ul. Hutnicza 3

tel. centrali 058 679 00 00

e-mail: info@operon.pl

<http://www.operon.pl>

ISBN 978-83-7461-592-1

SPIS TREŚCI

Od Wydawcy	5
I. Funkcje potęgowe, wykładnicze i logarytmiczne	7
1. Potęga o wykładniku całkowitym	7
2. Potęga o wykładniku wymiernym	12
3. Działania na potęgach o wykładniku wymiernym	19
4. Potęga o wykładniku niewymiernym	22
5. Funkcja potęgowa	26
6. Równania (nierówności) potęgowe	31
7. Funkcja wykładnicza	34
8. Równania (nierówności) wykładnicze	36
9. Logarytm i jego własności	40
10. Funkcja logarytmiczna	44
11. Równania (nierówności) logarytmiczne	47
II. Elementy geometrii analitycznej	53
1. Odległość dwóch punktów na płaszczyźnie współrzędnych	53
2. Równanie okręgu, nierówność koła	56
3. Prosta na płaszczyźnie współrzędnych	60
4. Prostopadłość i równoległość pary prostych na płaszczyźnie współrzędnych	63
5. Odległość punktu od prostej	67
6. Prosta i okrąg na płaszczyźnie współrzędnych	70
7. Nierówność opisująca półpłaszczyznę	75
III. Funkcje trygonometryczne	79
1. Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy argumentów	79
2. Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych	85
3. Przekształcanie wyrażeń trygonometrycznych	87
4. Dowodzenie tożsamości trygonometrycznych	92
5. Równania i nierówności trygonometryczne	95
IV. Elementy analizy matematycznej	103
1. Granica funkcji w punkcie	103
2. Granica funkcji w nieskończoności	112
3. Działania arytmetyczne na granicach funkcji	118
4. Obliczanie granic	121
5. Ciągłość funkcji w punkcie i w przedziale	128
6. Działania arytmetyczne na funkcjach ciągłych	132
7. Badanie ciągłości funkcji	133
8. Własności funkcji ciągłych	138

9. Pochodna funkcji w punkcie i jej interpretacje	143
10. Działania arytmetyczne na funkcjach różniczkowalnych	148
11. Obliczanie pochodnych wielomianów i funkcji wymiernych	154
12. Monotoniczność funkcji różniczkowalnych	159
13. Ekstrema funkcji różniczkowalnych	162
14. Zadania prowadzące do ekstremum funkcji różniczkowalnej	169
V. Elementy geometrii przestrzennej (stereometrii)	173
1. Przypomnienie wiadomości	173
2. Pojęcie graniastosłupa, rodzaje graniastosłupów	186
3. Pojęcie ostrosłupa, rodzaje ostrosłupów	190
4. Wzajemne położenie krawędzi i ścian w graniastosłupach i w ostrosłupach	193
5. Związki miarowe w graniastosłupach	196
6. Związki miarowe w ostrosłupach	202
7. Bryły obrotowe: walec, stożek, kula	210
8. Związki miarowe w bryłach obrotowych	214
9. Zadania różne z geometrii przestrzennej	222
VI. Elementy rachunku prawdopodobieństwa	229
1. Pojęcie silni. Permutacje zbioru skończonego	229
2. Symbol Newtona. Kombinacje zbioru skończonego	234
3. Wariacje (rozmieszczenia) z powtórzeniami i bez powtórzeń	241
4. Zadania różne z kombinatoryki	245
5. Zdarzenia elementarne	248
6. Zdarzenia i działania na zdarzeniach	250
7. Pojęcie prawdopodobieństwa i jego własności	254
8. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa	258
9. Zastosowanie klasycznej definicji prawdopodobieństwa	263
10. Prawdopodobieństwo warunkowe	269
11. Wzór na prawdopodobieństwo całkowite	273
12. Niezależność pary zdarzeń	276
13. Niezależność n zdarzeń ($n \geq 3$)	279
14. Zbiór zdarzeń elementarnych dla doświadczeń przebiegających niezależnie od siebie	281
15. Schemat Bernoulliego	286
16. Najbardziej prawdopodobna liczba sukcesów w schemacie Bernoulliego	289
17. Elementy statystyki opisowej	291
Odpowiedzi i wskazówki	301
Literatura pomocnicza	340
Indeks	341

Od Wydawcy

Podręcznik *Matematyka 3. Zakres rozszerzony* jest przeznaczony dla uczniów liceum ogólnokształcącego. Jest on częścią pakietu edukacyjnego, w którego skład wchodzi: program nauczania, zbiór zadań, przewodnik metodyczny dla nauczyciela, scenariusze lekcji, testy sprawdzające, zestawy testów przygotowujących do matury, stereogramy oraz filmy edukacyjne. Wszystkie te pozycje są ze sobą ściśle zintegrowane i pozwalają na pełne wykorzystanie nowoczesnych metod dydaktycznych w nauczaniu matematyki.

Tom trzeci podręcznika z trytomowej serii zawiera sześć rozdziałów: „Funkcje potęgowe, wykładnicze i logarytmiczne”, „Elementy geometrii analitycznej”, „Funkcje trygonometryczne”, „Elementy analizy matematycznej”, „Elementy geometrii przestrzennej (stereometrii)”, „Elementy rachunku prawdopodobieństwa”. Dzięki przejrzystej i powtarzalnej strukturze podręcznika przekazywana w nim wiedza jest doskonale uporządkowana.

Liczne przykłady ułatwiają zrozumienie omawianych tematów, a utrwaleniu wiadomości służą zamieszczone na końcu każdego rozdziału pytania i zadania, które swoją treścią często nawiązują do sytuacji z życia codziennego. Pytania i zadania o wysokim stopniu trudności, a także trudniejsze dowody twierdzeń i przykłady oznaczono jedną gwiazdką (*), natomiast dwiema gwiazdkami (***) wyróżniono materiał o bardzo wysokim stopniu trudności, przeznaczony dla uczniów szczególnie zainteresowanych matematyką. Na końcu książki znajdują się tablice, pomocne w usystematyzowaniu wiedzy, oraz spis literatury pomocniczej i polecane strony internetowe.

Prosimy o nadsyłanie pod adresem Wydawnictwa wszelkich uwag i sugestii. Będą one niezwykle przydatne w pracach nad kolejnymi publikacjami. Uczniom życzymy, aby praca z tym podręcznikiem przyczyniła się do wielu sukcesów w nauce.

Objaśnienia piktogramów i oznaczeń



definicja



pytania i zadania



dowód twierdzenia



dowód wniosku, przykładu lub lematu

* zadania i przykłady o wysokim (podwyższonym) stopniu trudności

** zadania i przykłady o bardzo wysokim stopniu trudności

Uwaga!

W podręczniku zastosowano oznaczenia zbiorów liczb używane w polskich szkołach. Ich międzynarodowe odpowiedniki zawiera tabela.

Oznaczenie stosowane w podręczniku	Zbiór liczb	Oznaczenie międzynarodowe
N	liczby naturalne	N
C	liczby całkowite	Z
R	liczby rzeczywiste	R
W	liczby wymierne	Q
IW	liczby niewymierne	Q'

I. Funkcje potęgowe, wykładnicze i logarytmiczne

1. Potęga o wykładniku całkowitym

Potęgowaniu liczb poświęciliśmy sporo uwagi w klasie pierwszej. Przypomnijmy zatem, że:

Potęga o dowolnej podstawie rzeczywistej a i o wykładniku naturalnym n większym od 1 nazywamy iloczynem n czynników, z których każdy jest równy a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$

Potęga liczby a o wykładniku 1 jest ta sama liczba a : $a^1 = a$.

Według definicji: $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$, $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$ itd. Na przykład:

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9, (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8, (-4)^1 = -4,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}, \left(-\frac{3}{5}\right)^4 = \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{81}{625}.$$

Widzimy stąd, że potęga liczby dodatniej jest liczbą dodatnią, a potęga liczby ujemnej jest albo liczbą dodatnią, gdy wykładnik jest liczbą parzystą, albo liczbą ujemną, gdy wykładnik jest liczbą nieparzystą.

Znamy też prawa działań na potęgach, określone wzorami:

$$(1) a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad (1') a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ gdy } m > n \text{ i } a \neq 0; \quad (2) (a^m)^n = a^{m \cdot n};$$

$$(3) (a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m; \quad (3') \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \text{ gdy } b \neq 0.$$

Prawa te wynikają bezpośrednio z podanej definicji potęgi oraz z praw działań na liczbach. Wystarczy dowieść praw (1), (2), (3), gdyż prawa (1') i (3') można wyprowadzić jako wnioski z praw odpowiednio (1) i (3). Na przykład wzór (1') można uzasadnić następująco:

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{(m-n)+n}}{a^n} = \frac{a^{m-n} \cdot a^n}{a^n} = a^{m-n}.$$

Zauważmy, że gdy $a > 1$, to $a^2 > 1$, $a^3 > 1$, $a^4 > 1$ itd., gdy zaś $0 < a < 1$, to $a^2 < 1$, $a^3 < 1$, $a^4 < 1$ itd. Istotnie, jeśli $a > 1$, to $a^2 > a > 1$ i wówczas z przechodniości nierówności wynika $a^2 > 1$. Stąd $a^3 > a > 1$, więc $a^3 > 1$ itd. Gdy zaś $0 < a < 1$, to $\frac{1}{a} > 1$. Zatem $\left(\frac{1}{a}\right)^2 > 1$, skąd otrzymujemy $a^2 < 1$. Podobnie jeśli $\left(\frac{1}{a}\right)^3 > 1$, $\left(\frac{1}{a}\right)^4 > 1$, to wtedy $a^3 < 1$, $a^4 < 1$ itd. Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.

Jeśli n jest dowolną liczbą naturalną dodatnią, to:

$$(1) a^n > 1, \text{ gdy } a > 1;$$

$$(2) a^n < 1, \text{ gdy } 0 < a < 1;$$

$$(3) a^n > b^n, \text{ gdy } a > b > 0.$$

Twierdzenie to można sformułować następująco:

Potęga o wykładniku naturalnym dodatnim liczby większej od 1 (liczby dodatniej, mniejszej od 1) jest większa (mniejsza) od 1. Potęga o wykładniku naturalnym dodatnim liczby dodatniej rośnie, gdy jej podstawa rośnie.

Zauważmy, że twierdzenia (2) i (3) wynikają z twierdzenia (1):

– gdy $0 < a < 1$, wtedy $\frac{1}{a} > 1$ i z twierdzenia (1) wyprowadzamy $\frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n > 1$, skąd $a^n < 1$.

– gdy zaś $a > b > 0$, wówczas $\frac{a}{b} > 1$ i z twierdzenia (1) uzyskujemy $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n > 1$, skąd $a^n > b^n$.

Przykład 1. Co jest większe: 2^{30} czy 3^{20} ?

Rozwiązanie:

Ponieważ $2^{30} = 2^{3 \cdot 10} = (2^3)^{10} = 8^{10}$, a $3^{20} = 3^{2 \cdot 10} = (3^2)^{10} = 9^{10}$, więc $3^{20} = 9^{10} > 8^{10}$, czyli większą liczbą jest 3^{20} , gdyż $9 > 8$.

Potęę o wykładniku zerowym określamy następująco:

Dla dowolnej liczby a różnej od zera

$$a^0 = 1,$$

czyli potęga zerowa liczby a różnej od zera jest równa 1.

Na przykład: $3^0 = 1$, $(-2)^0 = 1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$, $(-1,125)^0 = 1$.

Umawiamy się, że symbol 0^0 nie ma sensu liczbowego, a więc nie istnieje potęga, której podstawa i wykładnik są jednocześnie zerami.

Potęę o wykładniku całkowitym ujemnym określa definicja:

Dla dowolnej liczby a różnej od zera i dowolnej liczby naturalnej dodatniej n przyjmujemy

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

czyli potęga o wykładniku $-n$ liczby a różnej od zera jest odwrotnością n -tej potęgi tej liczby.

Na przykład: $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$, $\left(\frac{4}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{5^4}{4^4} = \frac{625}{256}$, $(-1)^{-3} = -1^3 = -1$.

Umawiamy się, że symbol 0^{-n} nie ma sensu liczbowego, zatem nie istnieje potęga liczby 0 o wykładniku całkowitym ujemnym.

Przyjęte definicje potęg o wykładniku zerowym lub całkowitym ujemnym pozwalają wykazać, że na potęgach o wykładnikach całkowitych wykonujemy działania tak samo, jak na potęgach o wykładnikach naturalnych dodatnich, co stanowi treść twierdzenia:

Twierdzenie 2.

Dla dowolnych liczb całkowitych m i n oraz dowolnych, różnych od zera liczb a i b zachodzą wzory:

$$(1) a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (1') a^m : a^n = a^{m-n}, \quad (2) (a^m)^n = a^{m \cdot n},$$

$$(3) (a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m, \quad (3') \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

□ Dowód. Aby udowodnić to twierdzenie, wystarczy wyprowadzić własności (1)–(3), gdyż wzory (1') i (3') wynikają już z (1) i (3).

Przykładowo uzasadnimy wzór (3).

Gdy $m > 0$, wzór jest prawdziwy (co wynika z własności działań na potęgach, gdy n jest dowolną liczbą naturalną większą od 1).

Gdy $m = 0$, to $(a \cdot b)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 \cdot b^0$.

Gdy wreszcie $m < 0$, to $-m > 0$ i wówczas:

$$(a \cdot b)^m = \frac{1}{(a \cdot b)^{-m}} = \frac{1}{a^{-m} \cdot b^{-m}} = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{b^{-m}} = a^{-(-m)} \cdot b^{-(-m)} = a^m \cdot b^m. \square$$

Przećwiczmy teraz wykonywanie działań na potęgach o wykładnikach całkowitych na kilku przykładach.

Przykład 2. Przedstaw w postaci potęgi liczby a wyrażenia:

$$\text{a) } \left(\frac{1}{a}\right)^3; \quad \text{b) } (a^3)^{-2}; \quad \text{c) } (a^{-1} \cdot a^{-2})^{-3}; \quad \text{d) } \frac{a^2 \cdot a^{-2}}{a^{10}}.$$

Rozwiązanie:

$$\text{a) } \left(\frac{1}{a}\right)^3 = \frac{1}{a^3} = a^{-3}; \quad \text{b) } (a^3)^{-2} = a^3 \cdot (-2) = a^{-6};$$

$$\text{c) } (a^{-1} \cdot a^{-2})^{-3} = (a^{-1+(-2)})^{-3} = (a^{-3})^{-3} = a^{(-3) \cdot (-3)} = a^9;$$

$$\text{d) } \frac{a^2 \cdot a^{-2}}{a^{10}} = \frac{a^{2+(-2)}}{a^{10}} = \frac{a^0}{a^{10}} = a^{0-10} = a^{-10}.$$

Przykład 3. Przedstaw w najprostszej postaci wyrażenia:

$$\text{a) } a^{-3} b^{-2} c^{-3} : (a^{-4} b^{-3} c^{-4}); \quad \text{b) } \left[(a^{-2})^{-1}\right]^3 : \left[(a^{-3})^{-1}\right]^{-2};$$

$$\text{c) } (a^{-1} b^2 c^{-3}) : (ab^{-1} c^{-2})^{-2}; \quad \text{d) } (x^{-1} + 1)(x^{-2} - x^{-1} + 1).$$

Rozwiązanie:

$$\text{a) } a^{-3} b^{-2} c^{-3} : (a^{-4} b^{-3} c^{-4}) = a^{-3-(-4)} b^{-2-(-3)} c^{-3-(-4)} = abc;$$

$$\text{b) } \left[(a^{-2})^{-1}\right]^3 : \left[(a^{-3})^{-1}\right]^{-2} = (a^2)^3 : (a^3)^{-2} = a^6 : a^{-6} = a^{12};$$

$$\text{c) } (a^{-1} b^2 c^{-3}) : (ab^{-1} c^{-2})^{-2} = (a^{-1} b^2 c^{-3}) : (a^{-2} b^2 c^4) = a^{-1-(-2)} b^{2-2} c^{-3-4} = a^1 b^0 c^{-7} = ac^{-7};$$

d) stosując wzór $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$, otrzymujemy:

$$(x^{-1}+1)(x^{-2}-x^{-1}+1) = \left((x^{-1})^1+1\right)\left((x^{-1})^2-(x^{-1})+1\right) = (x^{-1})^3+1 = x^{-3}+1.$$

Przykład 4. Oblicz, stosując najpierw własności działań na potęgach:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \frac{7^5 \cdot 5^4}{5^5 \cdot 49^3}; & \text{b)} & 2^{-4} \cdot (2^{-2})^{-3}; & \text{c)} & 25 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} \cdot (-2^{-3})^{-1}; \\ \text{d)} & \frac{\left((-2)^2\right)^3 \cdot (-4)^{-2}}{(-2)^3 \cdot (-2)^2}; & \text{e)} & (2^{-1} + 3^{-1})(2^{-1} - 3^{-1}) + (2^{-1} + 2^0)^{-4} \cdot 2^{-3}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \frac{7^5 \cdot 5^4}{5^5 \cdot 49^3} = \frac{7^5}{49^3} \cdot \frac{5^4}{5^5} = \frac{7^5}{7^6} \cdot \frac{5^4}{5^5} = 7^{5-6} \cdot 5^{4-5} = 7^{-1} \cdot 5^{-1} = (7 \cdot 5)^{-1} = 35^{-1} = \frac{1}{35}; \\ \text{b)} & 2^{-4} \cdot (2^{-2})^{-3} = 2^{-4} \cdot 2^6 = 2^{-4+6} = 2^2 = 4; \\ \text{c)} & 25 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} \cdot (-2^{-3})^{-1} = 25 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot (-2)^{-3 \cdot (-1)} = 5^2 \cdot 2^2 \cdot 5^{-2} \cdot (-2)^3 = 5^{2-2} \cdot 2^2 \cdot (-2^3) = \\ & = -5^0 \cdot 2^{2+3} = -1 \cdot 2^5 = -32; \\ \text{d)} & \frac{\left((-2)^2\right)^3 \cdot (-4)^{-2}}{(-2)^3 \cdot (-2)^2} = \frac{(2^2)^3 \cdot (-2^2)^{-2}}{(-2)^5} = \frac{2^6 \cdot 2^{-4}}{-2^5} = -\frac{2^2}{2^5} = -2^{-3} = -\frac{1}{8}; \\ \text{e)} & (2^{-1} + 3^{-1})(2^{-1} - 3^{-1}) + (2^{-1} + 2^0)^{-4} \cdot 2^{-3} = (2^{-1})^2 - (3^{-1})^2 + \left(\frac{1}{2} + 1\right)^{-4} \cdot 2^{-3} = \\ & = 2^{-2} - 3^{-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} \cdot 2^{-3} = 2^{-2} - 3^{-2} + 3^{-4} \cdot 2^4 \cdot 2^{-3} = 2^{-2} - 3^{-2} + 2 \cdot 3^{-4} = \\ & = \frac{1}{4} + 3^{-4}(2 - 3^2) = \frac{1}{4} + 3^{-4} \cdot (-7) = \frac{1}{4} - \frac{7}{3^4} = \frac{3^4 - 4 \cdot 7}{4 \cdot 3^4} = \frac{81 - 28}{4 \cdot 81} = \frac{53}{324}. \end{aligned}$$

Przykład 5. Zapisz w postaci potęgi wyrażenia:

$$\begin{aligned} \text{a)} & 25 \cdot 5^{-1} \cdot 5^3; & \text{b)} & (-16) \cdot (1:2^5) \cdot 2^6; & \text{c)} & 3^2 \cdot 2^5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}; \\ \text{d)} & (3^{-2})^{-2} \cdot 3^{-5} \cdot 27; & \text{e)} & \left[\left(\frac{1}{9} : \frac{8}{27}\right) : \frac{16}{48}\right] : \frac{81}{128}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \text{a)} & 25 \cdot 5^{-1} \cdot 5^3 = 5^2 \cdot 5^{-1} \cdot 5^3 = 5^{2-1+3} = 5^4; \\ \text{b)} & (-16) \cdot (1:2^5) \cdot 2^6 = -2^4 \cdot (2^0:2^5) \cdot 2^6 = -2^4 \cdot 2^{-5} \cdot 2^6 = -2^{4-5+6} = -2^5 = (-2)^5; \\ \text{c)} & 3^2 \cdot 2^5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = 3^2 \cdot 2^5 \cdot \frac{3^{-2}}{2^{-2}} = 3^2 \cdot 3^{-2} \cdot 2^5 \cdot 2^2 = 3^0 \cdot 2^7 = 2^7; \\ \text{d)} & (3^{-2})^{-2} \cdot 3^{-5} \cdot 27 = 3^4 \cdot 3^{-5} \cdot 3^3 = 3^{4-5+3} = 3^2; \\ \text{e)} & \left[\left(\frac{1}{9} : \frac{8}{27}\right) : \frac{16}{48}\right] : \frac{81}{128} = \left[\left[3^{-2} : \frac{2^3}{3}\right] \cdot 3^1\right] : \frac{3^4}{2^7} = \left[(3^{-2} \cdot 3^3 \cdot 2^{-3}) \cdot 3^1\right] \cdot 2^7 \cdot 3^{-4} = \\ & = (3^1 \cdot 2^{-3}) \cdot 3^1 \cdot 2^7 \cdot 3^{-4} = 3^1 \cdot 3^1 \cdot 2^{-3} \cdot 2^7 \cdot 3^{-4} = 2^4 \cdot 3^{-2} = \frac{16}{9}. \end{aligned}$$



Pytania i zadania

1. Podaj określenie potęgi o wykładniku:

- naturalnym dodatnim,
- zerowym,
- całkowitym ujemnym.

2. Jakie znasz prawa działań na potęgach o wykładnikach całkowitych?

3. Oblicz:

$$a) \frac{3^3}{3^6}, \frac{5^7}{5^6}, \frac{14^4}{2^5 \cdot 7^4}, \frac{2^3 + 2^{-3}}{4^3 + 1}, \frac{(3^4 + 3^3)^2}{9^3};$$

$$b) 2^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 - 2^{-2} \cdot 4 + \left[(-2)^2 : \frac{1}{2}\right] \cdot 8;$$

$$c) \left[(0,1)^2\right]^0 + \left[\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}\right]^2 \cdot \frac{1}{49} \cdot \left[(2^2)^3 : 2^5\right].$$

4. Zapisz w postaci potęgi wyrażenia:

$$a) 2 \cdot 4 \cdot 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot 2^3;$$

$$b) 9 \cdot 3^3 \cdot \frac{1}{81} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2};$$

$$c) 2 \cdot 3^3 \cdot \frac{1}{54} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2;$$

$$d) \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2^{-2} \cdot 8}{(-2^3)^2 \cdot 16} \cdot (2^2)^3;$$

$$e) 4^{-6} \cdot 4^4 \cdot (2^3 \cdot 2^{-4})^{-1};$$

$$f) 4^{-6} \cdot 256^2 \cdot 2^4.$$

5. Oblicz:

$$a) \left[\left(\frac{4}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3\right] : \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3};$$

$$b) (5^{-5})^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot 10^{-5};$$

$$c) \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}};$$

$$d) \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - 2^{-1}}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 2^{-1}}}.$$

6. Przedstaw w najprostszej postaci wyrażenia:

$$a) (8x^4 y^{-1}) : \left[(2x^3 y^2) \cdot x^9\right];$$

$$b) \left(\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}\right)^2 \cdot \frac{xy}{x^3 y^3};$$

$$c) \frac{(2y^2)^{-2} y^5}{y^3 \cdot y^{-2}};$$

$$d) (x:y)^{-2} \cdot \left[\left(\frac{1}{2}y\right) : x\right]^3;$$

$$e) (x^{-1} y^3)^{-2} \cdot \left(\frac{x^2}{2y}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-2x^2}{y^3}\right)^{-4};$$

$$f) \left(\frac{xy^2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{x^2 y}{3}\right)^2.$$

7. Dla jakich liczb całkowitych n zachodzi równość:

$$a) 3^{-2} \cdot 3^4 \cdot 3^n = 3^7;$$

$$b) 2^{-1} \cdot 2^n + 4 \cdot 2^n = 9 \cdot 2^5;$$

$$c) \frac{1}{9} \cdot 27^n = 3^n;$$

$$d) 3^2 \cdot 3^n = 3^5;$$

$$e) (2^2 : 4) \cdot 2^n = 4;$$

$$f) 0,000265 = 26,5 \cdot 10^n;$$

$$g) 0,00000547 = 5,47 \cdot 10^n;$$

$$h) 2,5 \cdot 10^{-4} \cdot 5,6 \cdot 10^{-2} = 1,4 \cdot 10^n?$$

8*. Znajdź wszystkie liczby naturalne n , które spełniają warunek:

- a) $32 < 2^n < 128$; b) $2 \cdot 16 \geq 2^n > 4$; c) $9 \cdot 27 \leq 3^n \leq 243$;
 d) $9 < 3^n < 81$; e) $3 < 3^n < 243$; f) $125 \geq 5^n \geq 25$.

9*. Uporządkuj rosnąco liczby:

- a) 2^{45} , 3^{36} , 4^{27} , 5^{18} ; b) 4^{100} , 32^{50} , 63^{23} ; c) 32^9 , 16^{12} , 63^7 , 18^{13} ;
 d) 2^{60} , 3^{48} , 5^{24} , 9^{28} , 81^{13} , 125^7 ; e) 2^{800} , 5^{300} , 8^{250} , 9^{225} , 16^{180} ; f) 2^{140} , 3^{100} , 4^{80} , 6^{60} , 11^{40} ;
 g) 9^{10} , 10^9 , $(0,1)^{10}$, $(0,3)^{20}$, 0^{100} , $(0,1)^{20}$, $(0,3)^{10}$.

2. Potęga o wykładniku wymiernym

Rozszerzymy teraz pojęcie potęgi. Określimy potęgę liczby dodatniej o wykładniku wymiernym. Jest to potęga a^w , gdzie a oznacza dowolną liczbę dodatnią, w – dowolną liczbę wymierną, którą (z definicji liczby wymiernej) można przedstawić w postaci ułamka $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi, a $n \neq 0$. Należy jeszcze udowodnić, że prawa działań na potęgach o wykładnikach całkowitych zachodzą również dla potęg o wykładnikach wymiernych.

Znamy już potęgę $a^{\frac{1}{n}}$, czyli $\sqrt[n]{a}$, zwaną **pierwiastkiem arytmetycznym stopnia n** z liczby nieujemnej (n oznacza tutaj dowolną liczbę naturalną większą od 1). Wiemy, że jest to taka **liczba nieujemna b** , że $b^n = a$.

Poprawność powyższej definicji pierwiastka arytmetycznego z liczby nieujemnej wynika z następującego twierdzenia:

Twierdzenie 1.

Dla każdej liczby nieujemnej a i dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n istnieje dokładnie jedna liczba nieujemna x spełniająca równanie:

$$x^n = a.$$

Twierdzenia tego nie będziemy dowodzić, gdyż wykraczałoby to znacznie poza ramy naszego podręcznika. Pozwala ono jednak przyjąć definicję:

Dla dowolnej liczby nieujemnej a i dowolnej liczby naturalnej dodatniej n potęga $a^{\frac{1}{n}}$ jest liczbą nieujemną, spełniającą równanie $x^n = a$.

Zatem $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$ oraz $\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}} = a$.

Określona w ten sposób potęgę $a^{\frac{1}{n}}$ zapisujemy też w postaci $\sqrt[n]{a}$ i nazywamy pierwiastkiem arytmetycznym stopnia n -tego z liczby nieujemnej a . Stąd $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ (w tym wypadku wyjątkowo nie piszemy nad symbolem $\sqrt{\quad}$ liczby 2), $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$, $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$ itd. Na przykład: $9^{\frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{1}{2}} = 3$, $8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2$, $625^{\frac{1}{4}} = (5^4)^{\frac{1}{4}} = 5$.

Powyższa definicja pierwiastka pozwala też pisać, że $a^{\frac{1}{1}} = a$, bo a jest jedyną liczbą spełniającą równanie $x = a$. Z definicji tej również wynika, że $0^{\frac{1}{n}} = 0$, ponieważ 0 jest jedyną liczbą, dla której zachodzi równość $x^n = 0$. Zatem $0^{\frac{1}{3}} = 0$, $0^{\frac{1}{5}} = 0$ itd.

Oczywiście, gdy $a > 0$, to $a^{\frac{1}{n}} > 0$.

Uwaga. Pierwiastek nieparzystego stopnia z liczby ujemnej. Z twierdzenia 1 można wysnuć następujący wniosek:

Wniosek. Dla każdej liczby ujemnej a i dla dowolnej liczby naturalnej nieparzystej n istnieje dokładnie jedna liczba ujemna x taka, że $x^n = a$.

Istotnie, bowiem gdy $a < 0$, to $-a > 0$ i na mocy twierdzenia 1 istnieje taka liczba $x > 0$, że $x^n = -a$, co wobec nieparzystości n możemy zapisać jako $(-x)^n = a$.

Tak więc, jeśli n jest liczbą naturalną nieparzystą, zaś a jest liczbą ujemną, to przyjmujemy $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$.

Na przykład: $\sqrt[3]{-1} = -\sqrt[3]{1} = -1$, $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$, $\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$,
 $\sqrt[7]{-2187} = -\sqrt[7]{2187} = -3$.

Pierwiastka stopnia parzystego z liczby ujemnej nie określamy.

Wiedząc, co oznacza potęgę $a^{\frac{1}{n}}$, możemy określić potęgę $a^{\frac{m}{n}}$:

Dla dowolnej liczby dodatniej a i dowolnych liczb całkowitych m i n , gdzie $n \neq 0$, przyjmujemy:

$$a^{\frac{m}{n}} = \begin{cases} \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m, & \text{gdy } n > 0 \\ a^{\frac{-m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{-n}}\right)^{-m}, & \text{gdy } n < 0. \end{cases}$$

Na przykład: $9^{\frac{3}{2}} = \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 3^3 = 27$, $8^{\frac{4}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^4 = 2^4 = 16$, $4^{\frac{-5}{2}} = 4^{\frac{-5}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{-5} = 2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$,
 $27^{\frac{-2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 3^2 = 9$.

Oczywiście, gdy $a > 0$, to $a^{\frac{m}{n}} > 0$.

Tak określona potęga a^w o wykładniku wymiernym w nie zależy od przedstawienia liczby w w postaci ułamka. Na przykład, ponieważ $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{-4}{-8}$ itd., więc $2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{-4}{-8}}$ itd. Zachodzi bowiem następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.

Dla dowolnej liczby dodatniej a i dowolnych liczb całkowitych m , n , p i q , gdzie $n \neq 0$ i $q \neq 0$, jeśli $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, to $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}$.

Dowód. Bez zmniejszenia ogólności rozumowania możemy przyjąć, że $n > 0$ i $q > 0$; gdyby bowiem było $n < 0$, wtedy moglibyśmy ułamek $\frac{m}{n}$ zastąpić ułamkiem $\frac{-m}{-n}$, bo zgodnie z definicją $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{-m}{-n}}$.

Oznaczmy $x_1 = a^{\frac{m}{n}}$, $x_2 = a^{\frac{p}{q}}$.

Wówczas mamy równości:

$$x_1^{nq} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{nq} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{mnq} = \left[\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n\right]^{mq} = a^{mq} \quad \text{oraz} \quad x_2^{nq} = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{nq} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{pnq} = \left[\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q\right]^{pn} = a^{pn},$$

z których wynika (na mocy założenia $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$), że $x_1^{nq} = x_2^{nq}$, stąd zaś (na mocy twierdzenia o równaniu $x^n = a$), że $x_1 = x_2$. \square

Wobec tego możemy przyjąć, że:

Jeżeli w jest liczbą wymierną, zaś a – liczbą dodatnią, to:

$$a^w = a^{\frac{m}{n}},$$

gdzie $\frac{m}{n}$ jest dowolnym ułamkiem przedstawiającym liczbę w .

Zauważmy przy tym, że gdy $a > 0$, to $a^w > 0$ dla każdej liczby wymiernej w . Teraz możemy sformułować kolejne twierdzenie:

Twierdzenie 3.

Dla dowolnych liczb dodatnich a i b i dowolnych liczb wymiernych u i w zachodzą wzory:

$$(1) a^u \cdot a^w = a^{u+w}, \quad (1') a^u : a^w = a^{u-w},$$

$$(2) (a^u)^w = a^{u \cdot w},$$

$$(3) (ab)^u = a^u \cdot b^u, \quad (3') \left(\frac{a}{b}\right)^u = \frac{a^u}{b^u}.$$

\square Dowód. Aby udowodnić to twierdzenie, wystarczy dowieść równości (1)–(3), gdyż podobnie jak poprzednio wzór (1') wynika ze wzoru (1), a wzór (3') – ze wzoru (3).

Dla przykładu udowodnijmy wzór (1). Niech $u = \frac{m}{n}$ i $w = \frac{p}{q}$, gdzie m, n, p i q są liczbami całkowitymi, przy czym $n > 0$ i $q > 0$. Wówczas mamy:

$$a^u \cdot a^w = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} \cdot a^{\frac{np}{nq}} = \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{mq} \cdot \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{np} = \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{mq+np} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = a^{u+w}. \quad \square$$

Z powyższego twierdzenia wynika następujący wniosek:

Wniosek. Dla dowolnej liczby dodatniej a i dowolnej liczby wymiernej w zachodzi równość:

$$a^{-w} = \frac{1}{a^w}.$$

Rzeczywiście, na mocy wzoru (1) otrzymujemy:

$$a^w \cdot a^{-w} = a^{w-w} = a^0 = 1.$$

Umawiamy się, że dla dowolnej liczby wymiernej dodatniej w przyjmujemy $0^w = 0$.

Zatem $0^{\frac{2}{3}} = 0$, $0^{\frac{3}{4}} = 0$ itp.

Przykład 1. Zapisz w postaci potęgi liczbę $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$.

Rozwiązanie:

$$\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} = \left(3^1 \cdot \left(3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(3^1 \cdot \left(3^{1+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(3^1 \cdot \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(3^1 \cdot 3^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(3^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{7}{8}}.$$

Przykład 2. Wykonaj działania:

$$\frac{\left(a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{7}{3}}\right)^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{2}}}{\left(ab^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} b^{\frac{7}{6}}}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \frac{\left(a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{7}{3}}\right)^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{2}}}{\left(ab^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} b^{\frac{7}{6}}} &= \frac{\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} \left(b^{\frac{7}{3}}\right)^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{4}{3}} \left(b^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} b^{\frac{7}{6}}} = \frac{a^{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}} b^{\frac{7}{3} \cdot \frac{2}{3}} a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{-\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}} b^{\frac{7}{6}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{14}{9}} a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{4}{3}} b^{-1} b^{\frac{7}{6}}} = \frac{a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} b^{\frac{14}{9}}}{a^{\frac{4}{3}} b^{-1 + \frac{7}{6}}} = \frac{a^1 b^{\frac{14}{9}}}{a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{1}{6}}} = \\ &= a^{1 - \frac{4}{3}} b^{\frac{14}{9} - \frac{1}{6}} = a^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{25}{18}}. \end{aligned}$$

Na koniec sformułujemy jeszcze twierdzenie zwane twierdzeniem o monotoniczności potęgi o wykładniku wymiernym pozwalające porównywać potęgi o wykładnikach wymiernych:

Twierdzenie 4.

Dla dowolnej liczby dodatniej a i dowolnych liczb wymiernych w_1 i w_2 takich, że $w_1 > w_2$, zachodzą związki:

$$(1) a^{w_1} > a^{w_2}, \text{ gdy } a > 1; \quad (2) a^{w_1} < a^{w_2}, \text{ gdy } a < 1.$$

Twierdzenie to można słownie wyrazić następująco:

Potęga liczby większej od 1 (dodatniej i mniejszej od 1) rośnie (maleje), gdy jej wykładnik wymierny wzrasta.

Dowód. Niech $w_1 = \frac{m}{n}$ i $w_2 = \frac{p}{q}$, gdzie m, n, p i q są liczbami całkowitymi, przy czym $n > 0$ i $q > 0$. Załóżmy też, że $a > 1$ oraz $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$.

Gdyby wówczas $a^{\frac{m}{n}} \leq a^{\frac{p}{q}}$, to podnosząc obie strony tej nierówności do potęgi nq , otrzymalibyśmy nierówność $a^{mq} \leq a^{np}$, a z niej, po podzieleniu obu stron przez a^{np} – nierówność $a^{mq - np} \leq 1$. Tymczasem liczba $mq - np$ jest liczbą całkowitą dodatnią, więc dla $a > 1$ zachodzi nierówność $a^{mq - np} > 1$. Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy (1). Twierdzenie (2) wynika zaś z twierdzenia (1), bowiem gdy $0 < a < 1$, to $\frac{1}{a} > 1$, zatem dla liczb wymiernych w_1 i w_2 , takich że $w_1 > w_2$, zachodzi nierówność $\left(\frac{1}{a}\right)^{w_1} > \left(\frac{1}{a}\right)^{w_2}$, czyli nierówność $\frac{1}{a^{w_1}} > \frac{1}{a^{w_2}}$ i ostatecznie nierówność $a^{w_1} < a^{w_2}$.

Z udowodnionego twierdzenia wynikają następujące wnioski:

Wniosek 1. Potęga o wykładniku wymiernym dodatnim w liczby a większej od 1 jest większa od 1, to znaczy, że gdy $a > 1$ i $w \in \mathbb{W}_+$, to $a^w > 1$.

Wniosek 2. Potęga o wykładniku wymiernym dodatnim w liczby a dodatniej i mniejszej od 1 jest mniejsza od 1, czyli gdy $0 < a < 1$ i $w \in \mathbb{W}_+$, to $a^w < 1$.

Wniosek 3. Potęga o wykładniku wymiernym dodatnim liczby dodatniej rośnie, gdy rośnie jej podstawa, a zatem gdy $a > b > 0$ i $w \in \mathbb{W}_+$, to $a^w > b^w$.

Wniosek 3. udowadniamy w ten sposób, że gdy $a > b > 0$, to $\frac{a}{b} > 1$ i wówczas dla $w \in \mathbb{W}_+$ zachodzą kolejno nierówności: $\left(\frac{a}{b}\right)^w > 1$, $\frac{a^w}{b^w} > 1$ i ostatecznie $a^w > b^w$.

Oto przykłady zastosowań twierdzenia 4:

$$1. 3^{\frac{3}{2}} > 3^{\frac{3}{4}}, \text{ bo } 3 > 1 \text{ i } \frac{3}{2} > \frac{3}{4};$$

$$2. \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{4}}, \text{ bo } 0 < \frac{1}{2} < 1 \text{ i } \frac{3}{2} > \frac{5}{4};$$

$$3. 4^{\frac{2}{3}} > 1, \text{ bo } 4 > 1 \text{ i } \frac{2}{3} > 0;$$

$$4. \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{2}} < 1, \text{ bo } 0 < \frac{2}{5} < 1 \text{ i } \frac{5}{2} > 0;$$

$$5. \left(\frac{2}{3}\right)^{0,3} < \left(\frac{3}{2}\right)^{0,3}, \text{ bo } 0 < \frac{2}{3} < \frac{3}{2} \text{ i } 0,3 > 0.$$



Pytania i zadania

1. Podaj definicję potęgi:

a) o wykładniku $\frac{1}{n}$, gdzie $n \in N_+$;

b) o wykładniku $\frac{m}{n}$, gdzie $m, n \in C$ i $n \neq 0$;

c) o dowolnym wykładniku wymiernym w .

2. Omów własności działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.

3. Omów monotoniczność potęgi o wykładniku wymiernym.

4. Napisz w postaci potęgi o wykładniku wymiernym: $\sqrt{11}$, $\sqrt[3]{4^2}$, $\sqrt[4]{13^5}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt[5]{3^4}}$, $\frac{1}{\sqrt[5]{7^3}}$,

$$\sqrt[4]{\frac{1}{3^{-3}}}, \sqrt[5]{5^{-3}}.$$

5. Napisz z użyciem symbolu pierwiastka: $5^{\frac{2}{3}}$, $3^{-\frac{2}{3}}$, $7^{2,5}$, $10^{\frac{7}{2}}$, $15^{-0,5}$, $13^{\frac{2}{5}}$.

6. Oblicz: $(0,008)^{\frac{-1}{3}}$, $27^{\frac{2}{3}}$, $\left(\frac{25}{16}\right)^{-0,5}$, $16^{1,5}$, $1024^{0,1}$, $(1,44)^{\frac{-1}{2}}$.

7. Co jest większe:

a) $2^{\frac{3}{7}}$ czy $3^{\frac{2}{7}}$; b) $2^{\frac{1}{2}}$ czy $3^{\frac{1}{3}}$; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ czy $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$; d) $100^{-\frac{1}{100}}$ czy $1000^{-\frac{1}{1000}}$; e) $8^{\frac{2}{3}}$ czy $\left(\frac{1}{128}\right)^{-\frac{2}{7}}$?

8. Napisz w postaci potęgi:

$$a) \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot 8^{-\frac{1}{3}}}{16^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2}}; \quad b) 3 \cdot \sqrt{27} \cdot 9^{-1,5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{-3}{4}} \cdot \left(\frac{1}{81}\right)^{-2}.$$

9. Uporządkuj rosnąco potęgi:

$$a) \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}, 1;$$

$$b) 2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{3}}, 4^{\frac{1}{4}};$$

$$c) (2\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{3}{4}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{4}}, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

10. Wykonaj działania:

$$a) (2^{\frac{1}{2}} + 1)^2, (2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}})^2, (2^{\frac{1}{3}} + 4^{\frac{1}{3}})^3, (5^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}})(5^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}});$$

$$b) (3^{-\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}})^2, (3^{-\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}})^3, (4^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}})(4^{\frac{2}{3}} - 2 + 4^{\frac{1}{3}}), (4^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}})(4^{\frac{2}{3}} + 2 + 4^{\frac{1}{3}});$$

$$c) (2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{2}{3}} - 1)(5 + 4 \cdot 2^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot 2^{\frac{2}{3}}), (2^{\frac{4}{3}} - 2^{\frac{2}{3}} - 1)(5 + 2^{\frac{7}{3}} + 3 \cdot 2^{\frac{2}{3}});$$

$$d) (x^{-\frac{1}{2}} - 1)(x^{-\frac{3}{2}} + x^{-1} + x^{-\frac{1}{2}} + 1), (a^{-1} + a^{-\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}} + 1)(a - a^{-\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} - 1).$$

11. Skróć ułamki:

$$a) \frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}};$$

$$b) \frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}};$$

$$c) \frac{a-b}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}};$$

$$d) \frac{a+b}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}};$$

$$e) \frac{a + 2\sqrt{ab} + b}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}};$$

$$f) \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{\sqrt{-a} + \sqrt{-b}};$$

$$g) \frac{a + 3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} + 3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} + b}{a^{\frac{2}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}};$$

$$h) \frac{a - 3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} + 3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} - b}{a^{\frac{2}{3}} - 2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}.$$

12. Oblicz:

$$a) 0,027^{-\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{-2} + 256^{0,75} - 3^{-1} + (5,5)^0;$$

$$b) \left[\left(\frac{3}{4}\right)^0\right]^{-0,5} - 7,5 \cdot 4^{-\frac{3}{2}} - (-2)^{-4} + 81^{0,25};$$

$$c) \left\{4^{0,25} + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]^{-\frac{4}{3}}\right\} \cdot \left\{4^{\frac{1}{4}} - (2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right\};$$

$$d) (27^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{3}} \cdot 32^{\frac{2}{5}} \cdot 81^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}};$$

$$e) \left[100^{-0,5} \cdot 64^{\frac{4}{3}} \cdot (0,2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4^{-\frac{3}{4}} \cdot 4^{-0,75}\right]^4;$$

$$f) \left[9^{-0,25} - (3\sqrt{3})^{-\frac{4}{3}}\right] \cdot \left[9^{-0,25} + (3\sqrt{3})^{-\frac{4}{3}}\right];$$

$$g) \left[\left(6 + 11^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(6 - 11^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 + \left[\left(7 - 24^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(7 + 24^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2.$$

13. Dla jakich liczb wymiernych w zachodzi równość:

a) $2 \cdot 2^w = 8^{\frac{w}{2}}$;

b) $3^{\frac{w}{2}-1} - 9 = 0$;

c) $4^{w+2} = 128$;

d) $2^{4w-9} = \left(\frac{1}{2}\right)^{w-4}$;

e) $(\sqrt[3]{2})^{w+13} = \frac{1}{32}$;

f) $\left(\frac{1}{64^2}\right)^{-w} = \sqrt{\frac{1}{8}}$;

g) $\left(\frac{2}{3}\right)^w \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^w = \frac{81}{256}$;

h) $3^w \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{w-3} = \left(\frac{1}{9}\right)^w$;

i) $2^w \cdot 3^w = 6\sqrt{36\sqrt{6}}$;

j) $6^{3-w} \cdot 6^{4+w} = \sqrt[3]{216^w}$;

k) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2w-3} = 4 \cdot 16^w$?

14. Dla jakich liczb całkowitych p zachodzi nierówność:

a) $6^p > \sqrt{36}$;

b) $\sqrt[5]{1024} \leq 4^p$;

c) $7^{p+2} \cdot \sqrt{49} \geq 343$;

d) $2^{3p} \cdot \sqrt{512} < \sqrt{2\sqrt{2}}$;

e) $25 \cdot 5^{2p} \leq \sqrt[3]{75} \cdot \sqrt[3]{\frac{5}{3}}$;

f) $\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{3p+1} > \frac{125}{8}$;

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3p-1} \leq 4\sqrt{\frac{1}{32}}$;

h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{p+2} \cdot \sqrt{\frac{1}{27}} \geq 9$?

15. Wykonaj działania:

a) $(x^4 y) \left(\frac{1}{3} x^{-3} y^{-1}\right)$;

b) $8 \left(x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{4}}\right) \left(\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}}\right)$;

c) $\left(\frac{27a^{-9}}{125b^{-3}}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

d) $(a^2 - b^2)^{\frac{3}{4}} (a^2 + b^2)^{\frac{3}{4}}$;

e) $(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}) (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})$;

f) $(a^{\frac{3}{8}} b^{\frac{1}{8}}) : (a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}})$.

16. Wykonaj działania:

a) $\frac{(a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{3}{2}} c^{4,5})^{\frac{2}{3}}}{(8b)^{\frac{1}{2}} c} \cdot \left(\frac{a^{-\frac{5}{3}} b^{1,25}}{a^{-\frac{5}{6}} b^{\frac{1}{6}}}\right)^{-\frac{6}{5}}$;

b) $(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{3}} - \sqrt{a})(2\sqrt{b} + 3b^{\frac{2}{3}} - 2b^{\frac{1}{2}})$;

c) $\sqrt[3]{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^4} : \sqrt[6]{x^5}} \cdot \sqrt[4]{x^2 : \sqrt[3]{x^2}}$;

d) $\frac{\left(\left(\sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x}\right) : \sqrt{x} \cdot \sqrt[6]{x}\right) : \sqrt[6]{x} \sqrt{x}}{\sqrt[8]{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x}}$.

17. Wykaż, że prawdziwe są nierówności:

a) $\sqrt[5]{4\sqrt{\sqrt{3}}} > \sqrt[3]{\sqrt[4]{10\sqrt{9}}}$;

b) $\sqrt[3]{4\sqrt{5}} > \sqrt[13]{5}$;

c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{4\sqrt{32}}} < \sqrt[7]{\sqrt[5]{3\sqrt{8^8}}}$;

d) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}}} > \sqrt[3]{\sqrt[15]{\frac{1}{8}}}$;

e) $(2\sqrt{2})^{100} > 8^{49}$;

f) $\sqrt[20]{2} + \sqrt[20]{3} > 2$;

g) $\sqrt{2} + \sqrt{3} > \pi$;

h) $\sqrt[30]{1} + \sqrt[4]{2} > 2$;

i) $\sqrt{1,1} + \sqrt[5]{1,2} > 2$.

3. Działania na potęgach o wykładniku wymiernym

Zajmiemy się teraz przekształcaniem bardziej złożonych wyrażeń algebraicznych, zawierających potęgi o wykładniku wymiernym.

Przykład 1. Uprość wyrażenie:

$$W = (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} - y^2(x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} + x^2 \cdot \frac{(x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} + y^2(x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2 - y^2) \cdot \left[1 + \left(\frac{(x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}{y} \right)^{-2} \right]}$$

Rozwiązanie:

Podstawmy w podanym wyrażeniu $(x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} = u$, wówczas otrzymamy:

$$\begin{aligned} W &= u - \frac{y^2}{u} + x^2 \cdot \frac{u + y^2 \cdot \frac{1}{u}}{u^2 \left[1 + \left(\frac{u}{y} \right)^{-2} \right]} = \frac{u^2 - y^2}{u} + \frac{x^2 \cdot \frac{u^2 + y^2}{u}}{u^2 \cdot \left(1 + \frac{y^2}{u^2} \right)} = \\ &= \frac{u^2 - y^2}{u} + x^2 \cdot \frac{\frac{u^2 + y^2}{u}}{u^2 \cdot \frac{u^2 + y^2}{u^2}} = \frac{u^2 - y^2}{u} + x^2 \cdot \frac{1}{u} = \frac{u^2 + x^2 - y^2}{u} = \\ &= \frac{2u^2}{u} = 2u = 2\sqrt{x^2 - y^2}, \text{ gdy } |x| > |y| \text{ i } y \neq 0. \end{aligned}$$

Odpowiedź: $W = 2\sqrt{x^2 - y^2}$.

Przykład 2. Uprość wyrażenie:

$$W = \frac{x^{\frac{3}{p}} - x^{\frac{3}{q}}}{\left(x^{\frac{1}{p}} + x^{\frac{1}{q}} \right)^2 - 2x^{\frac{1}{q}} \left(x^{\frac{1}{q}} + x^{\frac{1}{p}} \right)} + \frac{x^{\frac{1}{p}}}{x^{\frac{q-p}{pq}} + 1}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} 1) \quad & x^{\frac{3}{p}} - x^{\frac{3}{q}} = \left(x^{\frac{1}{p}} \right)^3 - \left(x^{\frac{1}{q}} \right)^3 = \left(x^{\frac{1}{p}} - x^{\frac{1}{q}} \right) \left(x^{\frac{2}{p}} + x^{\frac{1}{p}} \cdot x^{\frac{1}{q}} + x^{\frac{2}{q}} \right), \\ 2) \quad & \left(x^{\frac{1}{p}} + x^{\frac{1}{q}} \right)^2 - 2x^{\frac{1}{q}} \left(x^{\frac{1}{q}} + x^{\frac{1}{p}} \right) = \left(x^{\frac{1}{p}} + x^{\frac{1}{q}} \right) \left(x^{\frac{1}{p}} + x^{\frac{1}{q}} - 2x^{\frac{1}{q}} \right) = \left(x^{\frac{1}{p}} + x^{\frac{1}{q}} \right) \left(x^{\frac{1}{p}} - x^{\frac{1}{q}} \right), \\ 3) \quad & \frac{x^{\frac{1}{p}}}{x^{\frac{q-p}{pq}} + 1} = \frac{x^{\frac{1}{p}}}{x^{\frac{1}{p}} \cdot x^{\frac{1}{q}} + 1} = \frac{x^{\frac{1}{p}}}{x^{\frac{1}{p}} : x^{\frac{1}{q}} + 1} = \frac{x^{\frac{1}{p}}}{\frac{x^{\frac{1}{p}}}{x^{\frac{1}{q}} + x^{\frac{1}{q}}}} = \frac{x^{\frac{1}{p}} \cdot x^{\frac{1}{q}}}{x^{\frac{1}{p}} + x^{\frac{1}{q}}}. \end{aligned}$$

Wyrażenie W możemy więc zapisać następująco:

$$W = \frac{\left(x^{\frac{1}{p}} - x^{\frac{1}{q}} \right) \left(x^{\frac{2}{p}} + x^{\frac{1}{p}} \cdot x^{\frac{1}{q}} + x^{\frac{2}{q}} \right)}{\left(x^{\frac{1}{p}} + x^{\frac{1}{q}} \right) \left(x^{\frac{1}{p}} - x^{\frac{1}{q}} \right)} + \frac{x^{\frac{1}{p}} \cdot x^{\frac{1}{q}}}{x^{\frac{1}{p}} + x^{\frac{1}{q}}} =$$

$$= \frac{x^{\frac{2}{p}} + 2x^{\frac{1}{p}} \cdot x^{\frac{1}{q}} + x^{\frac{2}{q}}}{x^{\frac{1}{p}} + x^{\frac{1}{q}}} = \frac{\left(x^{\frac{1}{p}} + x^{\frac{1}{q}}\right)^2}{x^{\frac{1}{p}} + x^{\frac{1}{q}}} = x^{\frac{1}{p}} + x^{\frac{1}{q}}, \text{ gdy } x > 0 \text{ i } x \neq 1.$$

Odpowiedź: $W = x^{\frac{1}{p}} + x^{\frac{1}{q}}$.

Przykład 3. Uprość wyrażenie $W = \frac{x-y}{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{4}} y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{2}}}$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} W &= \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2}{x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\right)} \cdot \frac{x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\right)}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{4}} y^{-\frac{1}{4}}}{\left(x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}\right)^2} = \\ &= \frac{\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\right)} \cdot \frac{x^{\frac{1}{4}} \cdot y^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\right)}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{4}} \cdot y^{-\frac{1}{4}}}{\left(x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}\right)^2} = \\ &= \frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{\left(x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}\right)^2} = \frac{\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \left(y^{\frac{1}{4}}\right)^2}{\left(x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}\right)^2} = \frac{\left(x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}\right)^2} = \frac{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}}, \text{ gdy } x > 0, y \geq 0 \text{ i } x \neq y. \end{aligned}$$

Odpowiedź: $W = \frac{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}}$.

Przykład 4. Uprość wyrażenie $W = \frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a - b\right)} + \frac{2b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}}{a - b}$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} W &= \frac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3 + \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^3}{\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a - b\right)} + \frac{2b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}}{a - b} = \\ &= \frac{\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a - a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} + b\right)}{\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a - b\right)} + \frac{2b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}}{a - b} = \\ &= \frac{a - a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} + b}{a - b} - \frac{a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}}{a - b} + \frac{2b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{a - 2a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} + b}{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2} + \frac{2b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)} + \frac{2b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} + \frac{2b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} = 1, \text{ gdy } a \geq 0, b \geq 0 \text{ i } a \neq b. \end{aligned}$$

Odpowiedź: $W = 1$.



Pytania i zadania

1. Uprość wyrażenia:

$$a) \frac{\frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}} - \frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}}{\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x-y} + \frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{x-y}} \cdot \frac{2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{y-x};$$

$$b) \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}b} \right)^{-1} \cdot a + \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{2ab^{\frac{1}{2}}} \right)^{-1} \cdot b;$$

$$c) \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}} \right) (y^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}});$$

$$d) \left[\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}} \right)^{-2} - \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}} \right)^{-1} \right] (ab)^{-\frac{1}{2}}.$$

2. Uprość wyrażenia:

$$a) \left[\left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}} \right)^{-2} + \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}} \right)^{-2} \right] : \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{a-b} \right)^2;$$

$$b) \frac{\left(a^{\frac{1}{m}} - a^{\frac{1}{n}} \right)^2 + 4a^{\frac{m+n}{m \cdot n}}}{\left(a^{\frac{2}{m}} - a^{\frac{2}{n}} \right) \left(a^{\frac{m+1}{m}} + a^{\frac{n+1}{n}} \right)};$$

$$c) \left(\frac{x-9}{x+3x^{\frac{1}{2}}+9} : \frac{x^{\frac{1}{2}}+3}{x^{\frac{3}{2}}-27} \right)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}};$$

$$d) \left(\frac{9}{a+8} - \frac{a^{\frac{1}{3}}+2}{a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}+4} \right) \cdot \frac{a+8}{1-a^{\frac{2}{3}}} + \frac{5-a^{\frac{1}{3}}}{1+a^{\frac{1}{3}}}.$$

3*. Oblicz wartość wyrażen:

$$a) \frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{3}}} + \frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{3}}} \text{ dla } x=2;$$

$$b) \frac{1+a}{1+\sqrt{1+a}} - \frac{1-a}{1-\sqrt{1-a}} \text{ dla } a = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$c) \left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} - 2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ dla } x = \frac{a^3+1}{a^3-1}, \text{ gdzie } a > 0 \text{ i } a \neq 1;$$

$$d) \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} (x^{\frac{1}{p}} + x^{\frac{1}{q}}) \text{ dla } x = \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^{\frac{2pq}{q-p}}, \text{ gdzie } a > b \geq 0, p, q \in \mathbb{N}_+;$$

$$e) x^3 - 3x - 2 \cdot \frac{A^2+B}{A^2-B} \text{ dla } x = \left(\frac{A+B^{\frac{1}{2}}}{A-B^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{A-B^{\frac{1}{2}}}{A+B^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{3}}, \text{ gdy } A^2 > B \geq 0;$$

$$f) \left(\frac{(x^3y)^{\frac{1}{4}} - (xy^3)^{\frac{1}{4}}}{y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1+(xy)^{\frac{1}{2}}}{(xy)^{\frac{1}{4}}} \right)^{-2} \cdot (1+2x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+x^{-1}y)^{\frac{1}{2}} \text{ dla } x=9, y=0,04;$$

$$g) \left(\frac{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}} + (x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}} - (x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^{-2} \text{ dla } x = a \left(\frac{m^2+n^2}{2mn} \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ gdzie } a > 0, m > 0, n > 0 \text{ i } m > n.$$

4. Potęga o wykładniku niewymiernym

Wiemy już, co to jest a^α , gdy a jest dowolną liczbą dodatnią, zaś α – dowolną liczbą wymierną. Pora więc określić potęgę liczby dodatniej o wykładniku niewymiernym.

Najpierw zapoznajmy się z przykładem – rozważmy potęgę $3^{\sqrt{2}}$. Aby ją określić, musimy znaleźć kolejne przybliżenia dziesiętne z niedomiarem i nadmiarem liczby niewymiernej $\sqrt{2}$. Oto one:

1	2
1,4	1,5
1,41	1,42
1,414	1,415
1,4142	1,4143 itd.

Liczby te są wymierne, dlatego znamy potęgi, których są wykładnikami:

3^1	3^2
$3^{1,4}$	$3^{1,5}$
$3^{1,41}$	$3^{1,42}$
$3^{1,414}$	$3^{1,415}$
$3^{1,4142}$	$3^{1,4143}$ itp.,

na przykład:

$$3^{1,5} = 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}, \quad 3^{1,42} = 3^{\frac{142}{100}} = 3^{\frac{71}{50}} = 50\sqrt[50]{3^{71}} = 3 \cdot 50\sqrt[50]{3^{21}} \text{ itd.}$$

Ponieważ znalezione przybliżenia dziesiętne tworzą ciąg:

$1 < 1,4 < 1,41 < 1,414 < 1,4142 < \dots$, więc potęgi, których są wykładnikami, również:

$$(*) \quad 3^1 < 3^{1,4} < 3^{1,41} < 3^{1,414} < 3^{1,4142} < \dots$$

Prawidłowość ta dotyczy także drugiego ciągu liczb:

$2 > 1,5 > 1,42 > 1,415 > 1,4143 > \dots$, więc:

$$(**) \quad 3^2 > 3^{1,5} > 3^{1,42} > 3^{1,415} > 3^{1,4143} > \dots$$

Otrzymane dwa ciągi (*) i (**) są monotoniczne: pierwszy z nich jest rosnący, drugi zaś – malejący. Dowodzi się, że obydwa te ciągi **są zbieżne do tej samej granicy**, którą określamy właśnie jako $3^{\sqrt{2}}$.

To sugeruje następującą ogólną definicję potęgi o wykładniku niewymiernym:

- Jeżeli a jest dowolną liczbą dodatnią, różną od 1, zaś α – dowolną liczbą niewymierną, to potęgę a^α określamy następująco:
 Obieramy dwa ciągi przybliżeń dziesiętnych liczby α : z niedomiarem (w_n) i z nadmiarem (w_n'). Następnie rozważamy ciągi (a^{w_n}) i $(a^{w_n'})$ – potęg liczby a o wykładnikach wymiernych w_n i w_n' . Są one zbieżne do tej samej granicy. Tę ich wspólną granicę przyjmujemy jako wartość potęgi a^α .
- Gdy $a = 1$, to dla dowolnej liczby niewymiernej α przyjmujemy $1^\alpha = 1$.

W ten sposób mamy określoną potęgę a^α dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej a o dowolnym wykładniku rzeczywistym α .

Umawiamy się ponadto, że gdy $\alpha > 0$, to $0^\alpha = 0$, na przykład: $0^{\sqrt{3}} = 0$, $0^\pi = 0$.

Potęgi o wykładnikach niewymiernych mają te same własności, co potęgi o wykładnikach wymiernych. Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb dodatnich a i b oraz dowolnych liczb rzeczywistych α i β prawdziwe są wzory:

$$1. a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha + \beta}; \quad 2. a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha - \beta}; \quad 3. (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta};$$

$$4. (ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha; \quad 5. \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}.$$

Ponadto, jeżeli:

$$6. a > 1 \text{ i } \alpha < \beta, \text{ to } a^\alpha < a^\beta; \quad 7. 0 < a < 1 \text{ i } \alpha < \beta, \text{ to } a^\alpha > a^\beta.$$

W szczególności:

$$8. \text{ Gdy } a > 1 \text{ i } \alpha > 0, \text{ to } a^\alpha > 1. \quad 9. \text{ Gdy } 0 < a < 1 \text{ i } \alpha > 0, \text{ to } a^\alpha < 1.$$

Rozszerzając definicję potęgi, trzeba zdecydować, na jakich własnościach potęgowania nam zależy. Zwykle za najbardziej podstawową przyjmuje się własność wyrażoną wzorem 1. Definiując potęgę o dowolnym wykładniku rzeczywistym, tak by spełniony był warunek 1., zapewniamy, że wtedy będzie ona nieujemna, gdyż $a^x = a^{\frac{x}{2} + \frac{x}{2}} = a^{\frac{x}{2}} \cdot a^{\frac{x}{2}} = \left(a^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0$, przy czym, jeśli $a^w = 0$, to musi też być $a^x = a^w \cdot a^{x-w} = 0$ ($w \in \mathbf{W}, x \in \mathbf{R}$). Jeśli zatem chcemy, aby potęga a^x była określona dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$, to jej wartości muszą być dodatnie. Określając więc potęgę liczby ujemnej, należy albo zmniejszyć zbiór wykładników, albo zrezygnować z własności 1.

Przykład 1. Oblicz w przybliżeniu wartość potęgi $a = 5^{\sqrt{2}-1}$ z błędem mniejszym niż 1.

Rozwiązanie:

Z nierówności $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ wynika, że $0,4 < \sqrt{2} - 1 < 0,5$, a stąd $5^{0,4} < 5^{\sqrt{2}-1} < 5^{0,5}$.

Możemy teraz zamienić skrajne potęgi na pierwiastki: $5^{0,4} = 5^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{25}$ oraz $5^{0,5} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$, co pozwoli łatwo sprawdzić, że $2 < \sqrt{5} < 3$ i $1 < \sqrt[5]{25} < 2$. Zatem $1 < a < 3$.

Przyjmując więc w przybliżeniu $a = 2$, popełnimy błąd mniejszy niż 1.

Przykład 2. Która z liczb jest większa: $2^{\sqrt{3}}$ czy $3^{\sqrt{2}}$?

Rozwiązanie:

Ponieważ $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$, a $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$, więc $2^{1,7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,8}$, a $3^{1,4} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,5}$.

Spróbujmy wykazać, że $2^{1,8} < 3^{1,4}$. Istotnie: $2^{1,8} < 3^{1,4} \Leftrightarrow 2^{\frac{18}{10}} < 3^{\frac{14}{10}} \Leftrightarrow 2^{\frac{9}{5}} < 3^{\frac{7}{5}} \Leftrightarrow 2^9 < 3^7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 512 < 2187$. Ostatnia nierówność jest oczywiście prawdziwa, zatem $2^{1,8} < 3^{1,4}$. Wobec tego, że $2^{\sqrt{3}} < 2^{1,8}$ i $3^{1,4} < 3^{\sqrt{2}}$, ostatecznie otrzymujemy: $2^{\sqrt{3}} < 3^{\sqrt{2}}$.

Przykład 3. Rozstrzygnij, która z liczb $\sqrt{2^{\sqrt{3}}}$ i $\sqrt{3^{\sqrt{2}}}$ jest większa.

Rozwiązanie:

Sposób pierwszy. Wiemy już, że $3^{\sqrt{2}} > 2^{\sqrt{3}}$. Podnosząc obie strony tej nierówności do potęgi $\frac{1}{2}$, otrzymujemy: $(3^{\sqrt{2}})^{\frac{1}{2}} > (2^{\sqrt{3}})^{\frac{1}{2}}$, skąd $(3^{\frac{1}{2}})^{\sqrt{2}} > (2^{\frac{1}{2}})^{\sqrt{3}}$, czyli $\sqrt{3^{\sqrt{2}}} > \sqrt{2^{\sqrt{3}}}$.

Sposób drugi. Zauważmy, że $(\sqrt{3^{\sqrt{2}}})^{3\sqrt{2}} = \sqrt{3^6} = 3^3 = 27 > 16 = 2^4 = \sqrt{2^8} = \sqrt{2^{\sqrt{64}}} > \sqrt{2^{\sqrt{54}}} = (\sqrt{2^{\sqrt{3}}})^{3\sqrt{2}}$. Stąd $(\sqrt{3^{\sqrt{2}}})^{3\sqrt{2}} > (\sqrt{2^{\sqrt{3}}})^{3\sqrt{2}}$ i ostatecznie $\sqrt{3^{\sqrt{2}}} > \sqrt{2^{\sqrt{3}}}$.

Przykład 4.** Czy istnieją liczby niewymierne α i β takie, że α^β jest liczbą wymierną?

Rozwiązanie:

Liczy takie istnieją. Jeśli bowiem liczba $\sqrt{3^{\sqrt{2}}}$ jest wymierna, to przyjmujemy: $\alpha = \sqrt{3}$, $\beta = \sqrt{2}$. Jeśli zaś liczba $\sqrt{3^{\sqrt{2}}}$ jest niewymierna, to przyjmując $\alpha = \sqrt{3^{\sqrt{2}}}$, $\beta = \sqrt{2}$, widzimy, że liczba $\alpha^\beta = (\sqrt{3^{\sqrt{2}}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{3^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}} = \sqrt{3^2} = 3$, a więc jest wymierna.

Uwaga. Wiadomo, że liczba $3^{\sqrt{2}}$ jest niewymierna, ale dowód tego jest bardzo trudny.



Pytania i zadania

- Postępując się ogólną definicją potęgi o wykładniku niewymiernym, oblicz wartość przybliżoną potęgi:
 - $2^{\sqrt{3}}$; b) $3^{\sqrt{2}}$;
 - $\sqrt{2^{\sqrt{3}}}$; d) $5^{-\sqrt{2}}$.
- Które z podanych wyrażeń mają sens:
 - $-2^{\sqrt{2}}$; $(-2)^{\sqrt{2}}$; $2^{-\sqrt{2}}$; $(-2)^{-\sqrt{2}}$; $-2^{-\sqrt{2}}$;
 - 2^π ; -2^π ; $(-2)^\pi$; $(-1)^\pi$; π^{-1} ;
 - $(\sqrt{3})^{(\sqrt{5})^2}$; $3^{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$; $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^3$; $\sqrt{3}^{3\sqrt{5}}$; $((-3)^2)^{\sqrt{3}}$?
- Uporządkuj rosnąco liczby:
 - $2^{3,2}$; $2^{\frac{22}{7}}$; 2^π ; $2^{\sqrt{2}}$; $2^{\sqrt{3}}$;
 - $3^{1,5}$; $3^{\sqrt{2}}$; $3^{\sqrt{3}}$; 3^π ; 4.
- Która z liczb jest większa od 1:
 - $(0,(3))^{\sqrt{2}}$; b) $(\frac{\pi}{2})^{\sqrt{2,1}}$; c) $(\frac{\pi}{7})^{-\sqrt{3,1}}$?

5. Co jest większe: x czy y , jeśli:

a) $(0,8)^x > (0,8)^y$;

b) $(1,5)^x < (1,5)^y$;

c) $(7,1)^x > (7,1)^y$?

6. Która z liczb jest większa:

a) $12^{\sqrt{7}}$ czy $(2\sqrt{3})^{\sqrt{28}}$;

b) $2^{\sqrt{2}}$ czy $\sqrt{2}^2$;

c) $5^{\sqrt{3}}$ czy $3^{\sqrt{5}}$;

d) $\sqrt{5}^{\sqrt{3}}$ czy $\sqrt{3}^{\sqrt{5}}$;

e) $5^{\sqrt{7}}$ czy $7^{\sqrt{5}}$;

f) $\sqrt{5}^{\sqrt{7}}$ czy $\sqrt{7}^{\sqrt{5}}$?

7*. Dane są takie liczby dodatnie a, b, c , z których co najmniej jedna jest różna od 1, oraz takie liczby rzeczywiste x, y, z , że $a^x = bc$, $b^y = ca$, $c^z = ab$.

Udowodnij, że $x + y + z - xyz = -2$.

8*. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a i b zachodzą nierówności:

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b} \geq 1$;

b) $a^b b^a \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}$;

c) $a^{2b} b^{2b} \leq \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^{a+b}$;

d) $a^a b^b \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}$;

9**. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

10**. Wykaż, że jeżeli x i y są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, zaś α jest dowolną liczbą rzeczywistą, to $x^{\sin^2 \alpha} \cdot y^{\cos^2 \alpha} < x + y$.

11**. Liczby rzeczywiste dodatnie a, b, c spełniają warunek $a + b + c = 1$. Udowodnij, że $a^a b^b c^c + a^b b^c c^a + a^c b^a c^b \leq 1$.

12**. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a i b zachodzi nierówność $a^a + b^b > ab$.

5. Funkcja potęgowa

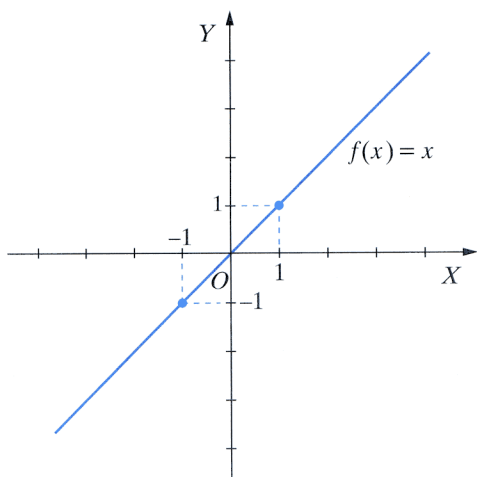
Wśród poznanych przez nas dotąd funkcji liniowych, kwadratowych i wymiernych występowały między innymi funkcje: $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^3$, $k(x) = \frac{1}{x}$. Pierwsze trzy z nich są określone w zbiorze \mathbf{R} wszystkich liczb rzeczywistych, ostatnia zaś – w zbiorze $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ liczb rzeczywistych różnych od zera. Wartości każdej z nich są wyrażone za pomocą potęgi argumentu o wykładniku odpowiednio 1, 2, 3 i -1 . Funkcje te należą do szerokiej klasy funkcji postaci $f(x) = x^\alpha$, zwanych **funkcjami potęgowymi** o wykładniku α , gdzie α jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Z poznanych własności potęg o dowolnym wykładniku rzeczywistym wynika, że dziedziną funkcji potęgowej $f(x) = x^\alpha$ jest:

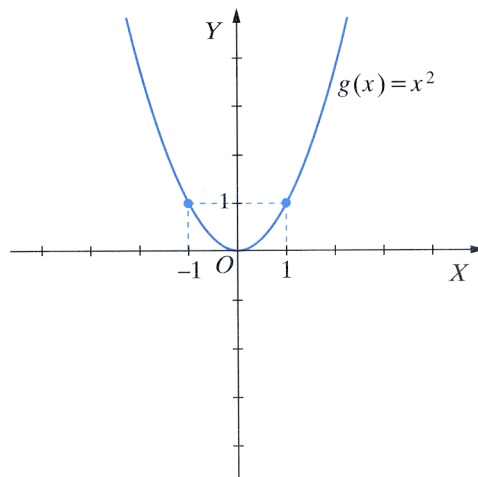
- zbiór \mathbf{R} wszystkich liczb rzeczywistych, gdy α jest dodatnią liczbą naturalną;
- zbiór $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ wszystkich liczb rzeczywistych różnych od zera, gdy α jest ujemną liczbą całkowitą lub zerem;
- zbiór $\mathbf{R}_+ \cup \{0\}$ nieujemnych liczb rzeczywistych, gdy α jest dodatnią liczbą wymierną (ale niecałkowitą);
- zbiór \mathbf{R}_+ dodatnich liczb rzeczywistych, gdy α jest ujemną liczbą wymierną (ale niecałkowitą) lub dowolną liczbą niewymierną.

Zatem każda funkcja potęgowa jest określona w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich, a niektóre funkcje potęgowe są określone w zbiorach zawierających zbiór liczb dodatnich.

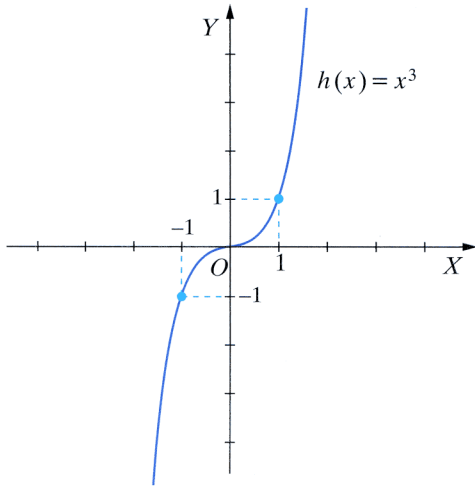
Poznaliśmy już funkcje potęgowe: $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^3$ i $k(x) = \frac{1}{x}$. Oto ich wykresy na rycinach 1.1–1.4.



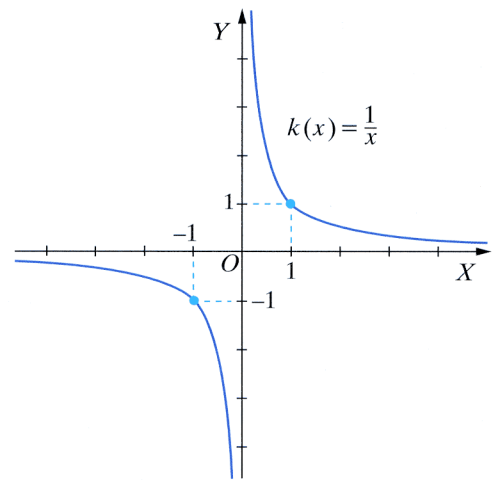
Ryc. 1.1.



Ryc. 1.2.

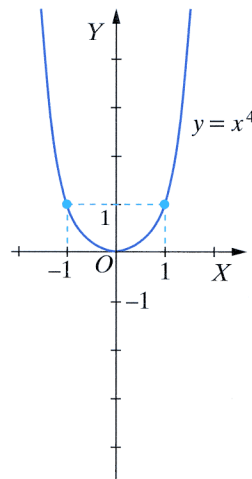


Ryc. 1.3.

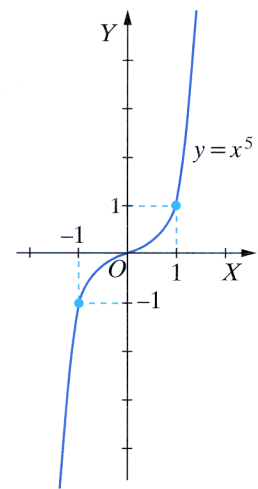


Ryc. 1.4.

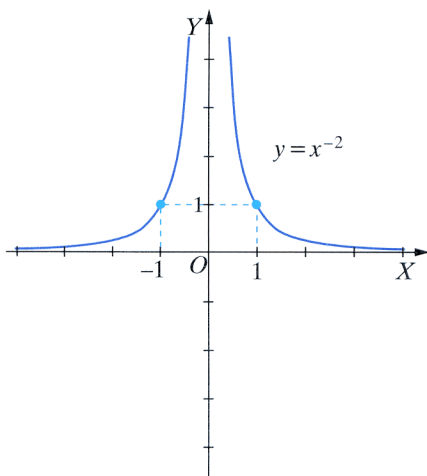
Omówimy teraz kilka podstawowych własności funkcji potęgowych, wynikających z poznanych wcześniej własności potęg. Dla wygody będziemy osobno rozpatrywać funkcje potęgowe o wykładnikach całkowitych i osobno funkcje potęgowe o wykładnikach wymiernych niecałkowitych. Na rycinach 1.5–1.9 zostały przedstawione wykresy kilku funkcji potęgowych o wykładnikach całkowitych.



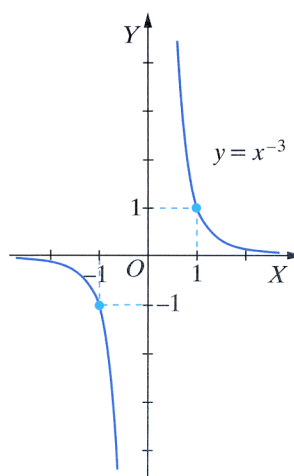
Ryc. 1.5.



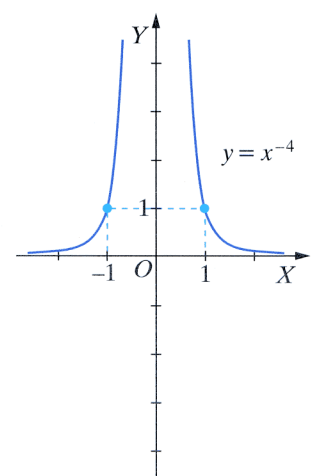
Ryc. 1.6.



Ryc. 1.7.



Ryc. 1.8.



Ryc. 1.9.

Jeżeli w jest liczbą całkowitą, to funkcja potęgowa $y = x^w$ jest:

- malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$ i rosnąca w przedziale $(0; +\infty)$, gdy w jest dodatnią liczbą parzystą;
- rosnąca w całym zbiorze \mathbf{R} liczb rzeczywistych, czyli w przedziale $(-\infty; +\infty)$, gdy w jest dodatnią liczbą nieparzystą;
- rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$ i malejąca w przedziale $(0; +\infty)$, gdy w jest liczbą parzystą mniejszą od zera;
- malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$ i $(0; +\infty)$, gdy w jest liczbą nieparzystą mniejszą od zera;
- stała i równa 1 dla każdego x różnego od 0, gdy w jest równe zero.

Zauważmy przy tym, że gdy w jest liczbą parzystą, to wobec równości $(-x)^w = x^w$, wykres funkcji $y = x^w$ jest symetryczny względem osi OY (ryc. 1.2, 1.5, 1.7 i 1.9); gdy zaś w jest liczbą nieparzystą, to zachodzi równość $(-x)^w = -x^w$, z której wynika, że wykres funkcji $y = x^w$ jest symetryczny względem punktu O (ryc. 1.1, 1.3, 1.4, 1.6 i 1.8).

Aby więc zbadać przebieg funkcji potęgowej $y = x^w$, wystarczy zbadać jej przebieg dla $x > 0$, bowiem na podstawie zauważonej symetrii będzie wiadomo, jak ta funkcja się zachowuje, gdy $x < 0$.

Przykład 1. Wykaż, że funkcja $f(x) = x^n$, gdzie n jest dodatnią liczbą naturalną, rośnie w przedziale $(0; +\infty)$.

Rozwiązanie:

Niech x_1 i x_2 będą takimi liczbami nieujemnymi, że $x_1 < x_2$. Wtedy $0 \leq \frac{x_1}{x_2} < 1$ i na mocy znanych własności potęgi o wykładniku naturalnym zachodzą kolejno nierówności: $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n < 1$, $\frac{x_1^n}{x_2^n} < 1$, $x_1^n < x_2^n$, czyli $f(x_1) < f(x_2)$. Wykazaliśmy tym samym, że

$\bigwedge_{x_1, x_2 \in (0; +\infty)} [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)]$, co oznacza, że funkcja $f(x) = x^n$, gdy $n \in \mathbf{N}_+$, jest rosnąca w przedziale $(0; +\infty)$.

Przykład 2. Udowodnij, że funkcja $f(x) = x^{-2k}$, gdzie $k \in \mathbf{N}_+$, jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$.

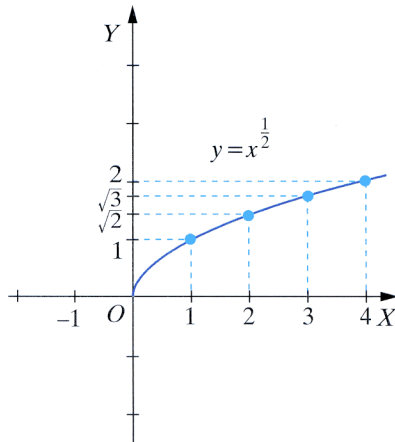
Rozwiązanie:

Wartości funkcji $f(x) = x^{-2k} = \frac{1}{x^{2k}}$ są odwrotnościami wartości funkcji $g(x) = x^{2k}$, która jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$. Wynika stąd, że funkcja $f(x)$ rośnie w tym przedziale.

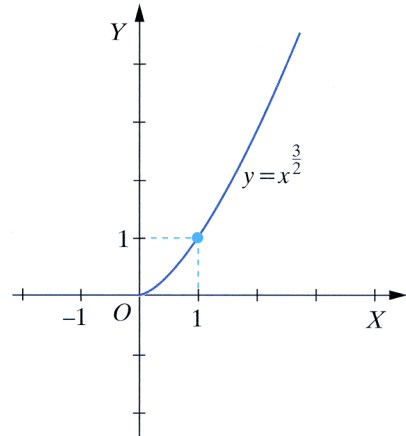
Niech w będzie niecałkowitą liczbą wymierną. Wówczas funkcja potęgowa $y = x^w$ jest:

- rosnąca w przedziale $(0; +\infty)$, gdy $w > 0$;
- malejąca w przedziale $(0; +\infty)$, gdy $w < 0$.

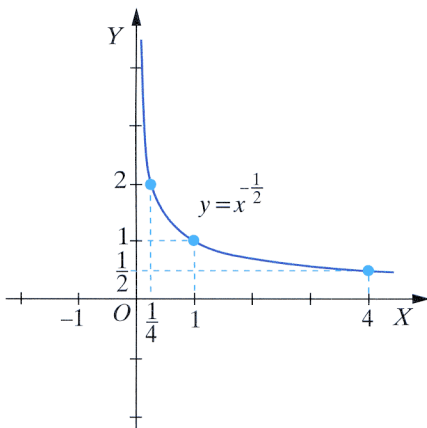
Na rycinach 1.10–1.13 przedstawiono wykresy funkcji $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{3}{2}}$, $y = x^{-\frac{1}{2}}$, $y = x^{-\frac{3}{2}}$.



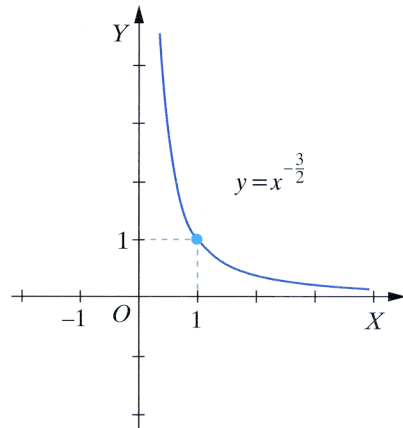
Ryc. 1.10.



Ryc. 1.11.



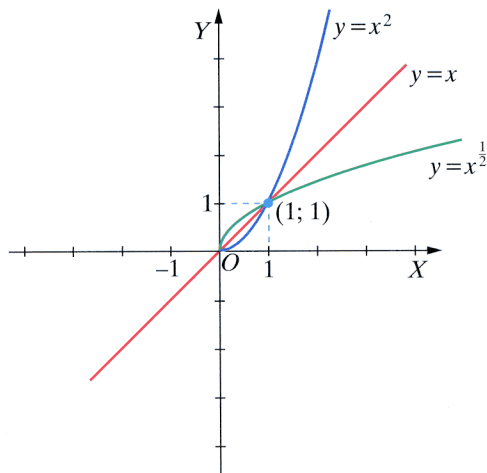
Ryc. 1.12.



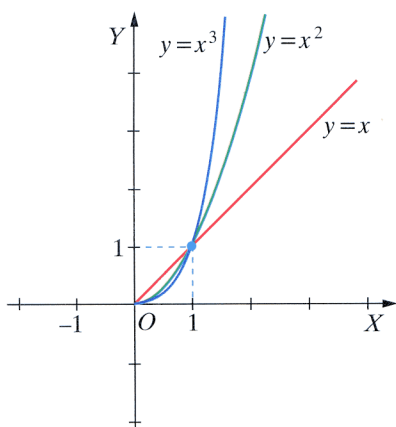
Ryc. 1.13.

Sporządzenie wykresu funkcji potęgowej $y = x^{\frac{1}{n}}$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$, jest dość łatwe. Gdy bowiem $y = x^{\frac{1}{n}}$, to $x = y^n$. Jeśli zamienimy w tej równości x na y , zaś y na x , otrzymamy równość $y = x^n$. Geometrycznie oznacza to, że gdy zamienimy współrzędne punktu wykresu funkcji $y = x^{\frac{1}{n}}$, otrzymamy punkt wykresu funkcji $y = x^n$. Jak wiemy z nauki o funkcjach w klasie pierwszej, punkty $(x; y)$ i $(y; x)$ leżą na płaszczyźnie XOY symetrycznie względem prostej o równaniu $y = x$. Punktami takimi są na przykład punkty o współrzędnych: $(1; 2)$ i $(2; 1)$, $(-3; 2)$ i $(2; -3)$. Wykres funkcji $y = x^{\frac{1}{n}}$ jest więc obrazem wykresu funkcji $y = x^n$ dla $x \geq 0$ w symetrii względem prostej o równaniu $y = x$. Ilustracją tego stwierdzenia jest rycina 1.14 na następnej stronie, która przedstawia wykres funkcji $y = x^{\frac{1}{2}}$ będący obrazem wykresu funkcji $y = x^2$ dla $x \geq 0$ we wspomnianej symetrii.

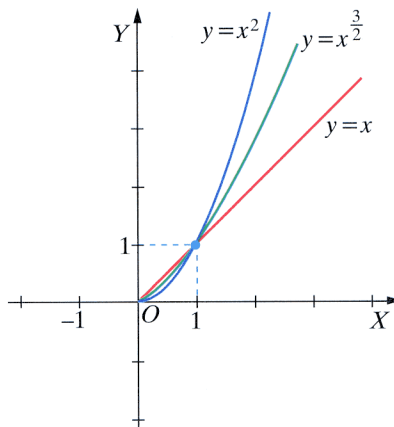
Przyglądając się wykresom funkcji potęgowych na rycinach 1.14–1.16, zauważamy, że mają one wspólne dwa punkty $(0; 0)$ i $(1; 1)$, gdy wykładnik $w > 0$, ponieważ $0^w = 0$ i $1^w = 1$, zaś jeden punkt $(1; 1)$, gdy wykładnik $w < 0$. Ponadto, gdy liczby wymierne dodatnie w_1 i w_2 spełniają warunek $w_1 < w_2$, to $x^{w_1} < x^{w_2}$ dla $x > 1$, a $x^{w_1} > x^{w_2}$ dla $0 < x < 1$. Wynika stąd, że wykres funkcji $y = x^{w_2}$ leży powyżej wykresu funkcji $y = x^{w_1}$ dla $x > 1$, a poniżej tego wykresu dla $0 < x < 1$ (ryc. 1.15 i 1.16).



Ryc. 1.14.

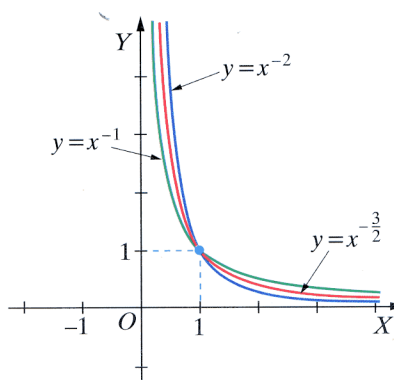


Ryc. 1.15.



Ryc. 1.16.

Podobnie stwierdzamy, że gdy liczby wymierne dodatnie w_1 i w_2 spełniają warunek $w_1 < w_2$, to $x^{-w_1} < x^{-w_2}$ dla $0 < x < 1$, zaś $x^{-w_1} > x^{-w_2}$ dla $x > 1$. Co oznacza, że wykres funkcji $y = x^{-w_2}$ leży powyżej wykresu funkcji $y = x^{-w_1}$ dla $0 < x < 1$, a poniżej tego wykresu dla $x > 1$ (ryc. 1.17).



Ryc. 1.17.

Pytania i zadania

1. Podaj określenie funkcji potęgowej.
2. Podaj dziedzinę funkcji potęgowej.
3. Podaj dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = x^5$;

b) $f(x) = x^6$;

c) $f(x) = x^{-3}$;

d) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$;

e) $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$;

f) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$;

g) $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$;

h) $f(x) = x^{-\frac{3}{2}}$.

4. Podaj zbiór wartości funkcji:

a) $f(x) = x^{-1}$; b) $f(x) = x^{-2}$; c) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$; d) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$;

e) $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$; f) $f(x) = x^{-\frac{3}{2}}$; g) $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$; h) $f(x) = x^{\frac{1}{10}}$.

5. Podaj przedział, w którym każda z podanych funkcji rośnie, i przedział, w którym maleje:

a) $f(x) = x^2$; b) $f(x) = x^{-3}$;

c) $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$; d) $f(x) = x^{-\frac{3}{2}}$.

6. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$; b) $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$;

c) $f(x) = x^{-3}$; d) $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$.

7. Zbadaj, czy dla $x \in (0; 1)$ zachodzą nierówności:

a) $x < x^2$; b) $x^3 < x$;

c) $x^8 > x^{\frac{1}{8}}$; d) $x^2 < x^3$.

6. Równania (nierówności) potęgowe

Równania (nierówności), w których niewiadoma występuje jako podstawa potęgi, nazywamy **równaniami (nierównościami) potęgowymi**. Prześledźmy na przykładach, jak rozwiązuje się takie równania (nierówności).

Przykład 1. Rozwiąż równanie: $x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{8}$.

Rozwiązanie:

Należy założyć, że $x > 0$, wtedy bowiem równanie to ma sens.

Podnosząc obie strony podanego równania do potęgi $-\frac{4}{3}$, otrzymujemy kolejno:

$$\left(x^{-\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{4}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}, \quad x^{-\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)} = \left(2^{-3}\right)^{-\frac{4}{3}}, \quad x = 2^{-3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)} \text{ i ostatecznie } x = 2^4.$$

Odpowiedź: $x = 16$.

Przykład 2. Rozwiąż równanie $x^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Rozwiązanie:

Zakładamy jak poprzednio, że $x > 0$, a następnie podnosimy obie strony równania do potęgi $-\frac{2}{3}$. Otrzymamy wówczas kolejno:

$$\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{-\frac{2}{3}}, \quad x^{-\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)} = \left(\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^2}\right)^{-\frac{2}{3}}, \quad x = \left(2^{-\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}} = 2^{-\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)} = 2^1 = 2.$$

Odpowiedź: $x = 2$.

Przykład 3. Rozwiąż równanie $\left(\frac{2\sqrt{x}}{x^2}\right)^{-3} = \left[(x\sqrt{x})^{-1}\right]^{-\frac{1}{2}}$.

Rozwiązanie:

Przy założeniu, że $x > 0$, otrzymujemy kolejno równania równoważne:

$$\left(\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{x^2}\right)^{-3} = \left[(x \cdot x^{\frac{1}{2}})^{-1}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

$$\left(2x^{-\frac{3}{2}}\right)^{-3} = \left[\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{-1}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

$$2^{-3} \cdot x^{\frac{9}{2}} = x^{\frac{3}{4}} \quad / \cdot 2^3 \cdot x^{-\frac{3}{4}},$$

$$x^{\frac{9}{2} - \frac{3}{4}} = 2^3,$$

$$x^{\frac{15}{4}} = 2^3,$$

$$\left(x^{\frac{15}{4}}\right)^{\frac{4}{15}} = \left(2^3\right)^{\frac{4}{15}},$$

$$x = 2^{\frac{4}{5}}.$$

Odpowiedź: $x = 2^{\frac{4}{5}}$.

Przykład 4. Rozwiąż nierówność $x^{-3} \geq x^{-2}$.

Rozwiązanie:

Nierówność ta ma sens, gdy $x \neq 0$.

Mnożąc obie strony nierówności przez x^3 , otrzymujemy nierówność równoważną: $x \leq 1$, gdy $x > 0$, lub $x \geq 1$, gdy $x < 0$. Ponieważ nierówności $x \geq 1$ i $x < 0$ nie mogą zachodzić jednocześnie, więc ostatecznie $x^{-3} \geq x^{-2} \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$.

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań podanej nierówności jest przedział $(0; 1]$.

Przykład 5. Rozwiąż nierówność $x^{\frac{1}{4}} \geq x^{\frac{1}{2}}$.

Rozwiązanie:

Zakładamy, że $x \geq 0$. Wtedy dla $x > 0$:

$$x^{\frac{1}{4}} \geq x^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} \leq 1 \Leftrightarrow x^{\frac{1}{4}} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

Łatwo stwierdzić, że liczba 0 także spełnia podaną nierówność.

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań danej nierówności jest przedział $\langle 0; 1 \rangle$.

Przykład 6. Rozwiąż nierówność $(x-1)^{-1} > x$.

Rozwiązanie:

Nierówność ta ma sens dla $x \neq 1$ (podstawa potęgi $(x-1)^{-1}$ musi być różna od zera).

Gdy $x-1 > 0$, czyli gdy $x > 1$, wtedy dana nierówność jest równoważna nierówności $x(x-1) < 1$, czyli nierówności $x^2 - x - 1 < 0$. Rozwiązując ją, otrzymujemy $1 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Gdy zaś $0 \leq x < 1$, podana nierówność nie zachodzi, ponieważ wyrażenie $(x-1)^{-1}$ jest ujemne. Wreszcie, gdy $x < 0$, wówczas podana nierówność jest równoważna nierówności $x(x-1) > 1$, a ta – nierówności $x^2 - x - 1 > 0$, która zachodzi dla $x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań danej nierówności jest $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Przykład 7*. Udowodnij, że jeżeli $x > 1$, to $\left(x^4 + \frac{1}{x}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right) < \left(x^4 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)$.

Rozwiązanie:

Dana nierówność jest równoważna kolejno nierównościom:

$$x^4 \cdot x^3 + x^4 \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot x^3 + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} < x^4 \cdot x^3 + x^4 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \cdot x^3 + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x},$$

$$x^7 + 2x^2 + \frac{1}{x^3} < x^7 + x^3 + x + \frac{1}{x^3}, \quad 2x^2 < x^3 + x, \quad 2x < x^2 + 1, \quad 0 < (x-1)^2,$$

a dla $x > 1$ ostatnia nierówność jest oczywiście prawdziwa.

Pytania i zadania



1. Rozwiąż równania:

a) $x^{-\frac{2}{3}} = 4$;

b) $x^{\frac{4}{3}} = 2\sqrt{2}$;

c) $x^{-1,5} = 2\frac{10}{27}$;

d) $x^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{32}$;

e) $x^{\frac{1}{3}} = x$;

f) $x = x^{\frac{1}{2}}$;

g) $x^{\frac{2}{3}} = x$;

h) $\frac{32}{243}x^{\frac{1}{3}} = x^2$.

2. Rozwiąż równania:

a) $x^{\frac{2}{3}} + 8 = 9x^{\frac{1}{3}}$;

b) $x^2 - 13(x^2 - 9)^{\frac{1}{2}} = -27$;

c) $(x^2 + 2x - 15)^{-0,25} = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

d) $(2x^2 - x + 2)^{-0,5} = 0,2\sqrt{5}$;

e) $(x^2 + x)^{-1,5} = 0,25\sqrt{2}$;

f) $(x^2 + x + 2)^{1,5} = 8x^3$.

3. Rozwiąż nierówności:

a) $x^{-2} \geq x^{-1}$;

b) $x > x^{-2}$;

c) $x^{-\frac{1}{3}} \geq x^{-\frac{1}{2}}$;

d) $(x-1)^{-2} \geq x^2$;

e) $x^{\frac{3}{5}} < x^{\frac{5}{4}}$;

f) $x^{-\frac{5}{6}} < x^{\frac{7}{6}}$.

4*. Udowodnij, że jeżeli $x > 1$, to:

a) $(2x^4 + x)\left(x^3 + 2 - \frac{1}{x}\right) < \left(2x^4 + 2 - \frac{1}{x}\right)(x^3 + x)$;

b) $\left(2x^3 + 2 - \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 + 2 - \frac{1}{x}\right) < \left(2x^3 + 2 - \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + 2 - \frac{1}{x^2}\right)$.

7. Funkcja wykładnicza

Niech a będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią. Wiemy już, co oznacza potęgę a^x dla każdej liczby rzeczywistej x . Możemy zatem każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkować potęgę a^x . Otrzymamy wówczas funkcję $f(x) = a^x$ określoną w zbiorze \mathbf{R} wszystkich liczb rzeczywistych.



Funkcję f , która dla danej liczby dodatniej a przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej x potęgę a^x , nazywamy **funkcją wykładniczą** o podstawie a i określamy wzorem $f(x) = a^x$.

Na przykład funkcje: $f(x) = 2^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $h(x) = (0,1)^x$ są funkcjami wykładniczymi o podstawach odpowiednio 2, $\frac{1}{3}$ i 0,1.

Omówimy teraz podstawowe własności funkcji wykładniczej, które wynikają ze znanych nam już własności potęg:

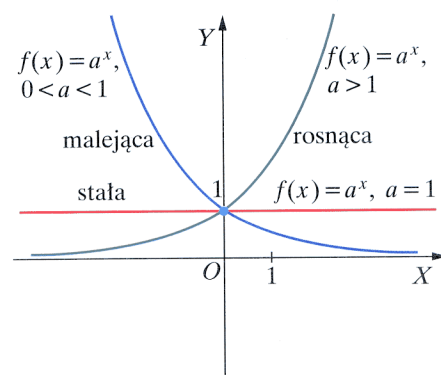
1. Jeżeli $a > 1$, to funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest rosnąca w zbiorze \mathbf{R} .

2. Jeżeli $a < 1$, to funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest malejąca w zbiorze \mathbf{R} .

3. Jeżeli $a = 1$, to funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$

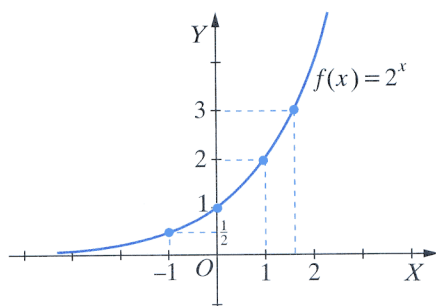
jest stała; wtedy bowiem $1^x = 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x (ryc. 1.18).

4. Jeżeli $a > 0$ i $a \neq 1$, to każda liczba rzeczywista dodatnia jest wartością funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ dla pewnego argumentu x . Ponadto każda wartość funkcji wykładniczej jest liczbą dodatnią. Mówimy zatem, że funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, odwzorowuje zbiór \mathbf{R} wszystkich liczb rzeczywistych na zbiór \mathbf{R}_+ wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych.

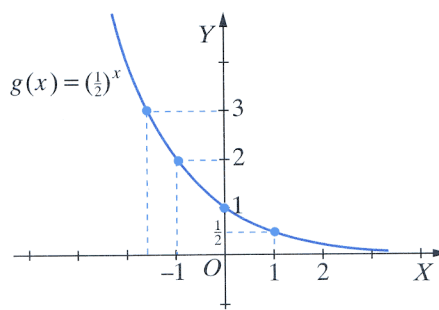


Ryc. 1.18.

Wykres funkcji wykładniczej nazywamy **krzywą wykładniczą**. Przykłady krzywych wykładniczych przedstawiono na rycinach 1.19, 1.20 i 1.21.



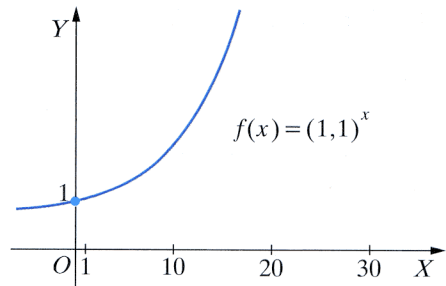
Ryc. 1.19.



Ryc. 1.20.

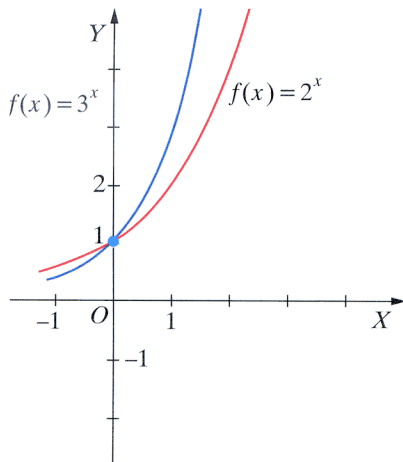
Patrząc na wykresy funkcji $f(x) = 2^x$ i $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (ryc. 1.19 i 1.20), zauważamy, że są one symetryczne względem osi OY ; jeśli bowiem punkt $(x; y)$ należy do wykresu funkcji f , to punkt $(-x; y)$ należy do wykresu funkcji g , co wynika z równości:

$$g(-x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 2^x = f(x).$$

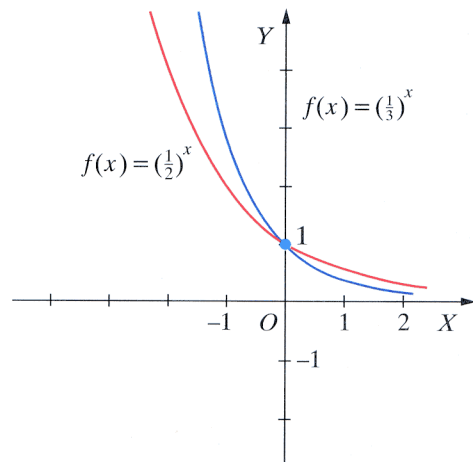


Ryc. 1.21.

Ponadto wykres każdej funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ przechodzi przez punkt $(0; 1)$, bo $f(0) = a^0 = 1$. Widzimy też, że każda funkcja wykładnicza o podstawie dodatniej i różnej od 1 jest monotoniczna. Co więcej, im jej podstawa $a > 1$ jest większa, tym funkcja ta rośnie szybciej; zaś im jej podstawa $a < 1$ jest mniejsza, tym szybciej maleje (ryc. 1.22, 1.23).



Ryc. 1.22.



Ryc. 1.23.

Warto też zauważyć, że gdy podstawa funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ jest większa od 1, wówczas funkcja ta przyjmuje dla dostatecznie dużych argumentów wartości dowolnie duże; dla dostatecznie małych argumentów zaś – wartości dowolnie bliskie zeru. Symbolicznie oznacza to, że gdy:

1. $x \rightarrow +\infty$, to $a^x \rightarrow +\infty$;
2. $x \rightarrow -\infty$, to $a^x \rightarrow 0$.

Gdy podstawa funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ jest mniejsza od 1, wówczas jeśli:

1. $x \rightarrow +\infty$, to $a^x \rightarrow 0$;
2. $x \rightarrow -\infty$, to $a^x \rightarrow +\infty$.



Pytania i zadania

- Podaj określenie funkcji wykładniczej.
- Podaj własności funkcji wykładniczej.
- Sprawdź, czy podane punkty należą do wykresu funkcji f , jeśli:
 - $f(x) = 2^x$, $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 4)$, $(3; 8)$, $(-1; \frac{1}{2})$, $(-2; \frac{1}{4})$;
 - $f(x) = (\frac{1}{2})^x$, $(0; 1)$, $(-1; 2)$, $(-2; 4)$, $(-3; 8)$, $(1; \frac{1}{2})$, $(2; \frac{1}{4})$.
- Sporządź wykresy funkcji:
 - $f(x) = 3^x$;
 - $f(x) = (\frac{1}{3})^x$;
 - $f(x) = (\frac{3}{2})^x$;
 - $f(x) = (\frac{2}{3})^x$.
- *. Sporządź wykresy funkcji:
 - $f(x) = 1 - 2^x$;
 - $f(x) = 2^{x-1}$;
 - $f(x) = 2^{|x|}$;
 - $f(x) = 2^{-|x|}$;
 - $f(x) = |1 - 2^x|$;
 - $f(x) = 2^{\frac{(x-1)^2}{|x-1|}}$;
 - $f(x) = 2^{\frac{x-|x|}{2}}$;
 - $f(x) = 2^{\frac{|x|}{x}}$.
- Wykaż, że jeżeli wartości argumentu x funkcji $f(x) = a^x$ tworzą ciąg arytmetyczny, to wartości tej funkcji tworzą ciąg geometryczny.
- Udowodnij, że jeżeli x_2 jest średnią arytmetyczną x_1 i x_3 , to a^{x_2} jest średnią geometryczną wartości a^{x_1} i a^{x_3} .
- ** . Dana jest funkcja: 1) $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$; 2) $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$.
 - Udowodnij, że $f(x) + f(1-x) = 1$.
 - Wyznacz sumę $f(0) + f(\frac{1}{2004}) + f(\frac{2}{2004}) + \dots + f(\frac{2003}{2004}) + f(1)$.

8. Równania (nierówności) wykładnicze

Równania (nierówności), w których niewiadoma występuje w wykładniku potęgi, nazywamy **równaniami (nierównościami) wykładniczymi**.

Rozwiązywanie równań wykładniczych zazwyczaj jest oparte na dwóch metodach:

- Przechodzenie od równania $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ do równania $f(x) = g(x)$; równania te przy $a > 0$ i $a \neq 1$ są równoważne, co wynika z różnowartościowości funkcji wykładniczej o podstawie dodatniej i różnej od 1.
- Wprowadzanie nowych zmiennych.

Prześledźmy to na przykładach.

Przykład 1. Rozwiąż równanie $3^x = \frac{1}{9}$.

Rozwiązanie:

$$3^x = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-2} \Leftrightarrow x = -2.$$

Odpowiedź: $x = -2$.

Przykład 2. Rozwiąż równanie $2^{3x-1} = 4^{x+2}$.

Rozwiązanie:

Prawą stronę równania zapisujemy w postaci $2^{2(x+2)}$ i otrzymujemy:

$$2^{3x-1} = 4^{x+2} \Leftrightarrow 2^{3x-1} = 2^{2(x+2)} \Leftrightarrow 3x-1 = 2(x+2) \Leftrightarrow x = 5.$$

Odpowiedź: $x = 5$.

Przykład 3. Rozwiąż równanie $3^{x-5} \cdot 9^{x+3} = 27$.

Rozwiązanie:

Wyrażenia po obu stronach równania zapisujemy jako potęgi o jednakowych podstawach:

$$3^{x-5} \cdot 9^{x+3} = 27 \Leftrightarrow 3^{x-5} \cdot 3^{2(x+3)} = 3^3 \Leftrightarrow 3^{x-5+2(x+3)} = 3^3 \Leftrightarrow x-5+2(x+3)=3 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Odpowiedź: $x = \frac{2}{3}$.

Przykład 4. Rozwiąż równanie $7^{x-5} = 9^{5-x}$.

Rozwiązanie:

Mnożymy obie strony równania przez 9^{x-5} i otrzymujemy:

$$7^{x-5} = 9^{5-x} \Leftrightarrow 7^{x-5} \cdot 9^{x-5} = 9^{5-x} \cdot 9^{x-5} \Leftrightarrow (7 \cdot 9)^{x-5} = 1 \Leftrightarrow 63^{x-5} = 63^0 \Leftrightarrow x-5 = 0 \Leftrightarrow x = 5.$$

Odpowiedź: $x = 5$.

Przykład 5. Rozwiąż równanie $4^{x^2} = 64^{4x-5}$.

Rozwiązanie:

$$4^{x^2} = 64^{4x-5} \Leftrightarrow 4^{x^2} = 4^{3(4x-5)} \Leftrightarrow x^2 = 3(4x-5) \Leftrightarrow x^2 - 12x + 15 = 0.$$

Rozwiązując równanie $x^2 - 12x + 15 = 0$ w znany sposób, otrzymujemy: $x = 6 - \sqrt{21}$ lub $x = 6 + \sqrt{21}$.

Odpowiedź: $x_1 = 6 - \sqrt{21}$, $x_2 = 6 + \sqrt{21}$.

Przykład 6. Rozwiąż równanie: $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$.

Rozwiązanie:

Równanie to jest równoważne równaniu $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$.

Wprowadzamy niewiadomą pomocniczą $y = 5^x$ i otrzymujemy równanie $y^2 - 6y + 5 = 0$.

Stąd $y = 1$ lub $y = 5$, czyli $5^x = 1$ lub $5^x = 5$, czyli $x = 0$ lub $x = 1$.

Odpowiedź: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Przykład 7*. Rozwiąż równanie $8^x - 3 \cdot 4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$.

Rozwiązanie:

Podstawiając w tym równaniu $2^x = y$, dostajemy równanie $y^3 - 3y^2 - 6y + 8 = 0$. Rozkładamy wielomian $y^3 - 3y^2 - 6y + 8$ i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} y^3 - 3y^2 - 6y + 8 &= (y^3 - y^2) - (2y^2 - 2y) - (8y - 8) = \\ &= y^2(y-1) - 2y(y-1) - 8(y-1) = (y-1)(y^2 - 2y - 8) = (y-1)(y-4)(y+2). \end{aligned}$$

Zatem $y^3 - 3y^2 - 6y + 8 = 0 \Leftrightarrow (y+2)(y-1)(y-4) = 0 \Leftrightarrow y = -2$ lub $y = 1$, lub $y = 4$.

Po ponownym podstawieniu $2^x = y$ otrzymujemy równania: $2^x = -2$, $2^x = 1$, $2^x = 4$. Pierwsze z nich jest sprzeczne, pozostałe są równoważne temu, że odpowiednio: $x = 0$, $x = 2$.
Odpowiedź: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

Rozwiązując nierówności wykładnicze, opieramy się na twierdzeniach o monotoniczności funkcji wykładniczej. Wiemy z nich, że funkcja wykładnicza o podstawie większej od 1 jest rosnąca, a funkcja wykładnicza o podstawie mniejszej od 1 jest malejąca. Oznacza to, że nierówność $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ jest równoważna nierówności $f(x) > g(x)$, gdy $a > 1$, a nierówności $f(x) < g(x)$, gdy $0 < a < 1$.

Przykład 8. Rozwiąż nierówność $2^x > \frac{1}{4}$.

Rozwiązanie:

$$2^x > \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^x > 2^{-2} \Leftrightarrow x > -2, \text{ gdyż } 2 > 1.$$

Odpowiedź: $x > -2$.

Przykład 9. Rozwiąż nierówność $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} \leq 8$.

Rozwiązanie:

Dana nierówność jest równoważna nierówności $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$, ta zaś – nierówności $2x-1 \geq -3$, gdyż $0 < \frac{1}{2} < 1$. Dalej: $2x-1 \geq -3 \Leftrightarrow 2x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Odpowiedź: $x \geq -1$.

Przykład 10. Rozwiąż nierówność $\frac{1}{3^{x^2}} \cdot 9^{x+1} > \frac{1}{729}$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3^{x^2}} \cdot 9^{x+1} > \frac{1}{729} &\Leftrightarrow 3^{-x^2} \cdot 3^{2(x+1)} > 3^{-6} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3^{-x^2+2x+2} > 3^{-6} \Leftrightarrow -x^2+2x+2 > -6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -x^2+2x+8 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 4. \end{aligned}$$

Odpowiedź: $-2 < x < 4$.

Przykład 11*. Rozwiąż nierówność $8^x - 2 \leq 18 \cdot 4^{x-1} - 3 \cdot 2^{x+1}$.

Rozwiązanie:

Podstawiając w podanej nierówności $2^x = y$, otrzymujemy do rozwiązania najpierw nierówność $y^3 - 2 \leq 18 \cdot y^2 \cdot 4^{-1} - 3 \cdot y \cdot 2$, która jest równoważna kolejno nierównościom:

$$\begin{aligned} y^3 - 2 &\leq \frac{9}{2} y^2 - 6y, \\ 2y^3 - 9y^2 + 12y - 4 &\leq 0. \end{aligned}$$

Rozkładając wielomian $2y^3 - 9y^2 + 12y - 4$ na czynniki, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 2y^3 - 9y^2 + 12y - 4 &= (2y^3 - 4y^2) - (5y^2 - 10y) + (2y - 4) = \\ &= 2y^2(y - 2) - 5y(y - 2) + 2(y - 2) = (y - 2)(2y^2 - 5y + 2) = \\ &= 2(y - 2)(y - 2)\left(y - \frac{1}{2}\right) = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)(y - 2)^2. \end{aligned}$$

Zatem pozostaje do rozwiązania nierówność $2\left(y - \frac{1}{2}\right)(y - 2)^2 \leq 0$, która zachodzi dla $y \leq \frac{1}{2}$ lub $y = 2$.

Po ponownym podstawieniu $2^x = y$ otrzymujemy $2^x \leq \frac{1}{2}$ lub $2^x = 2$, czyli $2^x \leq 2^{-1}$, lub $x = 1$ i ostatecznie $x \leq -1$ lub $x = 1$.

Odpowiedź: $x \leq -1$ lub $x = 1$.

Pytania i zadania



1. Rozwiąż równania:

a) $2^{x-1} = 4$; b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-x+2} = 25$; c) $3^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}$;
 d) $3^{x^2-7x+8} = 9$; e) $4^{\frac{x-1}{x+1}} = 1$; f) $4^{5x-8} = 16^{x-3}$.

2. Rozwiąż równania:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{4}{9}$; b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{3x-7} = \left(\frac{5}{2}\right)^{7x-2}$; c) $2^{x-5} \cdot 4^{x+3} = 4$;
 d) $\left(\frac{1}{27}\sqrt{3}\right)^x = 27 \cdot 9^{3-2x}$; e) $\left(\frac{1}{125} \cdot 25^x\right)^x = 5^{3x-4}$; f) $3^{x^2+2} = 3^{3x}$.

3. Rozwiąż równania:

a) $5^{x+2} - 5^x = 120$; b) $4^{x+3} - 4^x = 504$; c) $2^{5x} - 2^{5x-1} = 512$;
 d) $7^{x+1} + 7^x = 56$; e) $2 \cdot 16^x - 15 = 2^{4x} + 4^{2x-2}$; f) $3^{5x-4} + 3^{5x} = 82$.

4. Rozwiąż równania:

a) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$; b) $3^{3x} \cdot 5^{x-2} = 9^{x+1}$; c) $6^{2x+4} = 2^{3x} \cdot 3^{4x-4}$;
 d) $12^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 4^{x+8}$; e) $3 \cdot 9^x + 8 \cdot 3^x = 3$; f) $49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$.

5. Rozwiąż nierówności:

a) $5^{x-1} < \frac{1}{5}$; b) $3^x > 3^{2-x}$; c) $2^{x^2-6x+3} \geq \frac{1}{4}$;
 d) $2^x < 3^x$; e) $(0,1)^x > 10^x$; f) $(\sqrt{2})^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

6. Rozwiąż nierówności:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x^2-15x+13} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{4-3x}$; b) $5^{2x+4} - 25^x \leq 624$; c) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$;
 d) $(0,04)^{-x^2+5x-8} < 625$; e) $5^{2x+1} > 5^x + 4$; f) $2^{2+x} - 2^{2-x} < 15$.

9. Logarytm i jego własności

Wiemy już, że jeżeli $a > 0$ i $a \neq 1$, to każda liczba dodatnia jest wartością funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ dla pewnego i tylko jednego argumentu x . Zatem, jeżeli liczby a i b są dodatnie i $a \neq 1$, to istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista x taka, że $a^x = b$. Liczbę tę nazywamy **logarytmem liczby b przy podstawie a** i oznaczamy symbolem $\log_a b$.

Logarytmem liczby dodatniej b przy dodatniej i różnej od 1 podstawie a nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść a , by otrzymać b .

Logarytm ten oznaczamy symbolem $\log_a b$.

Krócej można to zapisać następująco:

Jeśli $a > 0$, $a \neq 1$ i $b > 0$, to $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$.

Wynika stąd następujący wniosek:

Wniosek. Dla każdej liczby dodatniej b i każdej dodatniej liczby a różnej od 1 zachodzi równość $a^{\log_a b} = b$.

Zapamiętajmy, że:

1. Każda liczba dodatnia ma dokładnie jeden logarytm przy danej dodatniej i różnej od 1 podstawie.
2. Nie istnieją logarytmy liczb ujemnych i zera.

Przykłady:

$$\log_2 8 = 3, \text{ bo } 2^3 = 8;$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2, \text{ bo } \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9;$$

$$\log_{16} 2 = \frac{1}{4}, \text{ bo } 16^{\frac{1}{4}} = 2;$$

$$\left. \begin{array}{l} \log_a 1 = 0, \text{ bo } a^0 = 1 \\ \log_a a = 1, \text{ bo } a^1 = a \end{array} \right\} \text{ dla każdego } a > 0 \text{ i } a \neq 1.$$

Logarytm liczby b przy podstawie 10 nazywamy **logarytmem dziesiętnym** liczby b i piszemy **log b** . Na przykład:

$$\log 100 = 2, \log 0,001 = -3, \log 1 = 0.$$

Przykład 1. Znajdź x , jeśli:

$$\text{a) } \log_2 x = -3; \quad \text{b) } \log_9 x = -\frac{1}{2}; \quad \text{c) } \log_3(x^2) = 2.$$

Rozwiązanie:

Oczywiście w przykładach a) i b) musi być $x > 0$, a w przykładzie c) wystarczy, aby $x \neq 0$.

Wówczas

$$\text{a) } \log_2 x = -3 \Leftrightarrow x = 2^{-3} = \frac{1}{8};$$

$$\text{b) } \log_9 x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3};$$

$$\text{c) } \log_3(x^2) = 2 \Leftrightarrow x^2 = 3^2 \Leftrightarrow x = -3 \text{ lub } x = 3.$$

Przykład 2. Znajdź x , jeśli:

a) $\log_x 9 = 2$; b) $\log_x 27 = 3$; c) $\log_x 625 = -4$.

Rozwiązanie:

a) $\log_x 9 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 9$ i $x > 0$, i $x \neq 1 \Leftrightarrow x = 3$;

b) $\log_x 27 = 3 \Leftrightarrow x^3 = 27$ i $x > 0$, i $x \neq 1 \Leftrightarrow x = 3$;

c) $\log_x 625 = -4 \Leftrightarrow x^{-4} = 625$ i $x > 0$, i $x \neq 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$.

Sformułujmy teraz kilka własności logarytmu.

Twierdzenie 1.

Jeżeli $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, to $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$, czyli logarytm przy tej samej podstawie dodatniej i różnej od 1 iloczynu dwóch lub więcej liczb dodatnich jest równy sumie logarytmów tych liczb przy tej samej podstawie.

Dowód. Mamy:

$$a^{\log_a(bc)} = bc = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = a^{\log_a b + \log_a c}, \text{ a stąd } \log_a(bc) = \log_a b + \log_a c. \square$$

Twierdzenie 2.

Jeżeli $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, to $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$, czyli logarytm przy tej samej podstawie dodatniej i różnej od 1 ilorazu dwóch liczb dodatnich równa się różnicy logarytmów dzielnej i dzielnika przy tej samej podstawie.

Dowód. Mamy:

$$a^{\log_a\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{b}{c} = \frac{a^{\log_a b}}{a^{\log_a c}} = a^{\log_a b - \log_a c}, \text{ skąd } \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c. \square$$

Uwaga. Podaną równość można uzyskać jako wniosek z równości poprzedniej, mianowicie: $\log_a b = \log_a\left(\frac{b}{c} \cdot c\right) = \log_a\left(\frac{b}{c}\right) + \log_a c$, skąd wynika dowodzona równość.

Twierdzenie 3.

Jeżeli $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ i $\alpha \in \mathbf{R}$, to $\log_a(b^\alpha) = \alpha \log_a b$, czyli logarytm przy tej samej podstawie dodatniej i różnej od 1 potęgi liczby dodatniej jest równy iloczynowi wykładnika i logarytmu tej liczby przy tej samej podstawie.

Dowód.

$$a^{\log_a(b^\alpha)} = b^\alpha = (a^{\log_a b})^\alpha = a^{\alpha \log_a b}, \text{ skąd wynika żądany wzór. } \square$$

Uwaga. Z udowodnionej równości można otrzymać, jako wniosek, wzór podany w twierdzeniu 2:

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b \cdot c^{-1}) = \log_a b + \log_a(c^{-1}) = \log_a b - \log_a c.$$

Twierdzenie 4. (wzór na zmianę podstawy logarytmu)

Jeżeli $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, $c > 0$, to $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$, czyli aby otrzymać logarytm liczby dodatniej c przy nowej podstawie b , należy podzielić logarytm liczby c przy dawnej podstawie a przez logarytm nowej podstawy b przy dawnej podstawie a .

Dowód. Mamy:

$$a^{\log_a c} = c = b^{\log_b c} = (a^{\log_a b})^{\log_b c} = a^{(\log_a b) \cdot (\log_b c)}, \text{ skąd wynika żądana równość. } \square$$

Twierdzenie 5.

Jeżeli $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, to $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, co oznacza, że jeśli w danym logarytmie zamienimy miejscami podstawę i liczbę logarytmowaną, to otrzymamy odwrotność danego logarytmu.

Dowód. Zgodnie ze wzorem na zmianę podstawy logarytmu:

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}. \square$$

Twierdzenie 6.

Jeżeli $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $\beta \neq 0$, to $\log_{a^\beta} b^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \log_a b$.

Dowód. Wzór ten uzyskujemy jako wniosek z poprzednich twierdzeń:

$$\log_{(a^\beta)} (b^\alpha) = \alpha \log_{(a^\beta)} b = \alpha \cdot \frac{1}{\log_b (a^\beta)} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta \cdot \log_b a} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{\log_b a} = \frac{\alpha}{\beta} \log_a b. \square$$

Oto kilka przykładów zastosowań poznanych własności.

Przykład 3. Znajdź x , jeśli $\log x = \log 2 + \log 5$.

Rozwiązanie:

$$\log x = \log 2 + \log 5 \Leftrightarrow \log x = \log 2 \cdot 5 \Leftrightarrow x = 10.$$

Odpowiedź: $x = 10$.

Przykład 4. Znajdź x , jeśli $\log_2 x = \log_2 48 - \log_2 3$.

Rozwiązanie:

$$\log_2 x = \log_2 48 - \log_2 3 \Leftrightarrow \log_2 x = \log_2 \frac{48}{3} \Leftrightarrow \log_2 x = \log_2 16 \Leftrightarrow x = 16.$$

Odpowiedź: $x = 16$.

Przykład 5. Oblicz $\log 5 \cdot \log 20 + (\log 2)^2$.

Rozwiązanie:

$$\log 5 \cdot \log 20 + (\log 2)^2 = \log 5 \cdot \log 5 \cdot 4 + (\log 2)^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \log 5 (\log 5 + \log 4) + (\log 2)^2 = \\
&= (\log 5)^2 + (\log 5)(\log 4) + (\log 2)^2 = \\
&= (\log 5)^2 + (\log 5) \cdot (\log 2^2) + (\log 2)^2 = \\
&= (\log 5)^2 + 2(\log 5)(\log 2) + (\log 2)^2 = \\
&= (\log 5 + \log 2)^2 = (\log 10)^2 = 1^2 = 1.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: 1.

Przykład 6. Oblicz $\log_{\sqrt{2}} 27 \cdot \log_9 16$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
\log_{\sqrt{2}} 27 \cdot \log_9 16 &= \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^3 \cdot \log_{3^2} 2^4 = 2 \cdot 3 \cdot \log_2 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \log_3 2 = \\
&= 12 \cdot \log_2 3 \cdot \log_3 2 = 12 \cdot 1 = 12.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: 12.

Przykład 7. Wiadomo, że $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$, $\log_c x = 6$. Oblicz $\log_{abc} x$.

Rozwiązanie:

$$\log_{(abc)} x = \frac{1}{\log_x (abc)} = \frac{1}{\log_x a + \log_x b + \log_x c} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Odpowiedź: $\log_{(abc)} x = 1$.

Przykład 8*. Oblicz iloczyn $I = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \dots \cdot \log_{99} 100 \cdot \log_{100} 2$.

Rozwiązanie:

Stosując do każdego z logarytmów wzór na zmianę podstawy (nową podstawą będzie wszędzie 10), otrzymujemy:

$$I = \frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 4}{\log 3} \cdot \frac{\log 5}{\log 4} \cdot \dots \cdot \frac{\log 100}{\log 99} \cdot \frac{\log 2}{\log 100} = 1.$$

Pytania i zadania

1. Podaj definicję logarytmu.
2. Omów własności logarytmu.
3. Oblicz:

a) $\log_3 9$; b) $\log_{\frac{1}{2}} 8$; c) $\log_{\sqrt{5}} 25$; d) $\log_{81} 3$;
e) $\log_8 \frac{\sqrt{2}}{4}$; f) $\log_{(\frac{3}{3})} 9$; g) $\log_{0,01} 100$; h) $\log_2 (2\sqrt{2})$.

4. Oblicz:

a) $2^{\log_4 25}$; b) $3^{\log_{\frac{1}{3}} 5}$; c) $(\sqrt[3]{4})^{\log_{16} 9}$; d) $(\sqrt{5})^{\frac{1}{\log_4 5}}$;
e) $3^{2 - \log_3 2}$; f) $25^{\log_5 4}$; g) $81^{\log_{\frac{1}{3}} 2}$; h) $\left(\frac{3}{2}\right)^{1 + \frac{1}{1 - \log_3 2}}$.

5. Wyznacz x , jeśli:

a) $\log_{\frac{1}{3}} x = -4$; b) $\log_{0,01} x = -2$; c) $\log_x \frac{1}{27} = 3$;
d) $\log_x 100 = 2$; e) $\log_{x^2} 16 = 1$; f) $\log_{\sqrt{3}} x^2 = 4$.



6. Oblicz:

$$\text{a) } 81^{\log_3 2} + 16^{-\log_{\frac{1}{4}} 3}; \quad \text{b) } 16^{3\log_2 3 + 4\log_{256} 3}; \quad \text{c) } 49^{1 - \log_7 14} + 9^{-\log_3 2};$$

$$\text{d) } \log_{\sqrt[3]{3}} 4 \cdot \log_{64} 27; \quad \text{e) } \log_{\sqrt[3]{5}} 2 \cdot \log_{\sqrt[3]{2}} 5; \quad \text{f) } \log(2 + \sqrt{3}) + \log(2 - \sqrt{3}).$$

7. Oblicz:

$$\text{a) } \log \sin 10^\circ \cdot \log \sin 20^\circ \cdot \log \sin 30^\circ \cdot \dots \cdot \log \sin 90^\circ;$$

$$\text{b) } \log \operatorname{tg} 10^\circ \cdot \log \operatorname{tg} 15^\circ \cdot \log \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \log \operatorname{tg} 25^\circ \cdot \dots \cdot \log \operatorname{tg} 85^\circ;$$

$$\text{c) } \log \operatorname{tg} 10^\circ + \log \operatorname{tg} 20^\circ + \log \operatorname{tg} 30^\circ + \dots + \log \operatorname{tg} 80^\circ.$$

$$8^*. \text{ Oblicz wartość wyrażenia } \frac{\log_6^2 3 + \log_6 16}{\log_6 3 \cdot \log_6 48 + \log_6^2 4}.$$

9**. Oblicz:

$$\text{a) } \frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \dots + \frac{1}{\log_n x}, \text{ jeśli } n \in \mathbb{N}_+ \text{ i } n \geq 2;$$

$$\text{b) } \frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \dots + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n}, \text{ gdy } x > 0 \text{ i } x \neq 1;$$

$$\text{c) } \log_x \sqrt{a} + \log_x \sqrt[3]{a} + \log_x \sqrt[4]{a} + \dots + \log_x \sqrt[n]{a}, \text{ gdy } a > 0, x > 0 \text{ i } x \neq 1.$$

$$10. \text{ Oblicz } \log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}, \text{ jeśli } a > 0, b > 0 \text{ i } ab \neq 1 \text{ oraz } \log_{ab} a = 4.$$

$$11^*. \text{ Udowodnij, że jeżeli } a > 0, b > 0 \text{ i } a^2 + b^2 = 7ab, \text{ to } \log \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log a + \log b).$$

$$12^*. \text{ Udowodnij, że jeżeli } a > 0, b > 0, x > 0, a \neq 1, b \neq 1, x \neq 1 \text{ i } ab \neq 1, \text{ to:}$$

$$\frac{\log_a x - \log_b x}{\log_a x + \log_b x} = \log_{ab} \left(\frac{b}{a} \right).$$

10. Funkcja logarytmiczna

Niech a będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią i różną od 1. Ponieważ każda liczba dodatnia ma przy podstawie a jednoznacznie określony logarytm, więc każdej liczbie dodatniej x można przyporządkować liczbę $\log_a x$.

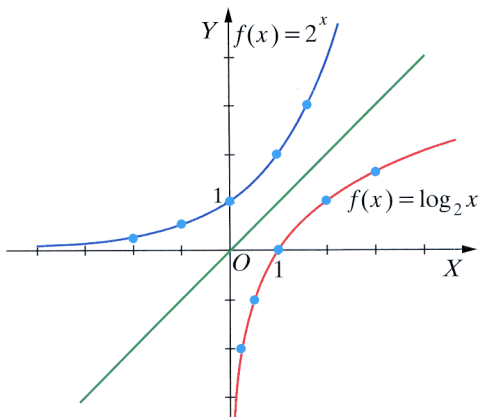
Funkcję, która każdej liczbie dodatniej x przyporządkowuje jej logarytm przy podstawie a , nazywamy **funkcją logarytmiczną** o podstawie a . Jest to więc funkcja określona wzorem:

$$f(x) = \log_a x \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}_+, \text{ gdzie } a > 0 \text{ i } a \neq 1.$$

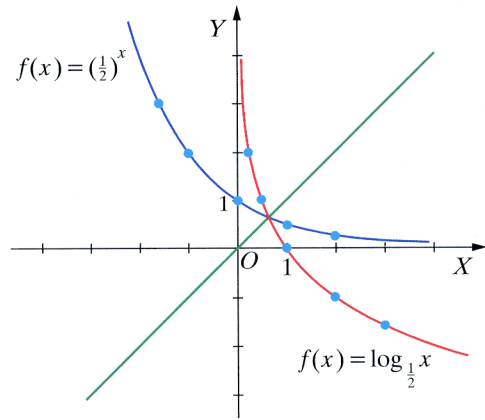
Wykres funkcji logarytmicznej łatwo otrzymujemy z wykresu funkcji wykładniczej. Zamiast $y = \log_a x$ możemy przecież równoważnie napisać $x = a^y$; jeśli zamienimy w tej równości miejscami litery x i y , mamy $y = a^x$.

Geometrycznie oznacza to, jak wiemy, że zastępując punkt wykresu funkcji $y = \log_a x$ punktem doń symetrycznym względem prostej o równaniu $y = x$, otrzymujemy punkt wykresu funkcji $y = a^x$; i na odwrót. Wykres funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$ jest więc ob-

razem wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ w symetrii względem prostej zawierającej dwusieczną kąta XOY (ryc. 1.24 i 1.25).



Ryc. 1.24.



Ryc. 1.25.

Funkcja logarytmiczna ma zatem następujące własności:

1. Dziedziną funkcji $f(x) = \log_a x$ jest zbiór dodatnich liczb rzeczywistych, czyli przedział $(0; +\infty)$, a zbiorem wartości – zbiór \mathbf{R} wszystkich liczb rzeczywistych.
2. Funkcja $f(x) = \log_a x$ jest rosnąca, gdy $a > 1$, zaś malejąca, gdy $0 < a < 1$.
3. Wykres każdej funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$ przechodzi przez punkt $(1; 0)$. Jeśli podstawa funkcji logarytmicznej jest większa od 1, wówczas im większa podstawa, tym funkcja wolniej rośnie. Jeśli podstawa funkcji logarytmicznej jest dodatnia i mniejsza od 1, wówczas im mniejsza podstawa, tym funkcja wolniej maleje.

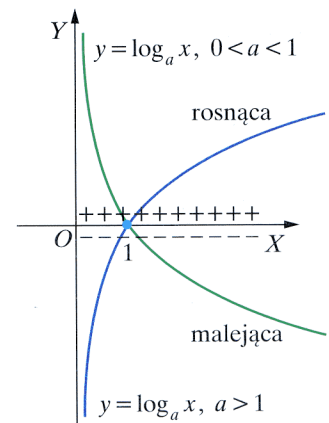
Warto też zauważyć, że gdy podstawa funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$ jest większa od 1, to funkcja ta dla argumentów dostatecznie bliskich zeru przyjmuje wartości ujemne o bardzo dużej wartości bezwzględnej, a dla argumentów dostatecznie dużych – wartości dodatnie dowolnie duże, co zapisujemy następująco:

- gdy $x \rightarrow 0^+$, to $\log_a x \rightarrow -\infty$;
- gdy $x \rightarrow +\infty$, to $\log_a x \rightarrow +\infty$.

Jeśli zaś podstawa funkcji $f(x) = \log_a x$ jest mniejsza od 1, to:

- gdy $x \rightarrow 0^+$, to $\log_a x \rightarrow +\infty$;
- gdy $x \rightarrow +\infty$, to $\log_a x \rightarrow -\infty$.

Na wykresie funkcji logarytmicznej $y = \log_a x$ można też spostrzec, że przyjmuje ona wartości dodatnie dla argumentów większych od 1, a ujemne – dla argumentów mniejszych od 1, gdy jej podstawa jest większa od 1; dodatnie zaś wartości dla argumentów mniejszych od 1, a ujemne – dla argumentów większych od 1, gdy jej podstawa jest mniejsza od 1 (ryc. 1.26). Wynika stąd, że logarytmy o podstawie większej od 1 liczb większych od 1 są dodatnie, a liczb mniejszych od 1 – ujemne; logarytmy zaś o podstawie mniejszej od 1 liczb większych od 1 są ujemne, a liczb mniejszych od 1 – dodatnie.



Ryc. 1.26.



Pytania i zadania

- Podaj określenie funkcji logarytmicznej.
- Podaj własności funkcji logarytmicznej:
 - dziedzinę; b) zbiór wartości; c) monotoniczność; d) znak.
- Sprawdź, czy podane punkty należą do wykresu funkcji f , jeśli:
 - $f(x) = \log_3 x$, $(1; 0)$, $(3; 1)$, $(9; 2)$, $(27; 3)$, $(\frac{1}{3}; -1)$, $(\frac{1}{9}; -2)$;
 - $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, $(1; 0)$, $(\frac{1}{3}; 1)$, $(\frac{1}{9}; 2)$, $(\frac{1}{27}; 3)$, $(3; -1)$, $(9; -2)$.
- Sporządź wykres funkcji:
 - $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} |x|$;
 - $f(x) = \left| \log_{\frac{1}{2}} x \right|$;
 - $f(x) = \left| \log_{\frac{1}{2}} |x| \right|$;
 - $f(x) = \log_2(1 - x)$;
 - $f(x) = 1 - \log_2 x$;
 - $f(x) = 1 - \log_2 |x|$.
- Wyznacz dziedzinę funkcji:
 - $f(x) = \log_3(2x - 1)$;
 - $f(x) = \log_2(x^2 + 1)$;
 - $f(x) = \log_2(x^2 - 4)$;
 - $f(x) = \log_3(1 - |x|)$;
 - $f(x) = \log_x(2 - x)$;
 - $f(x) = \log_{(2x-1)} x$.
- Określ znak liczby:
 - $\log_2 3$;
 - $\log_{\frac{1}{2}} 5$;
 - $\log_{\frac{1}{2}} 0,3$;
 - $\log_3 0,01$;
 - $\log_2(\log_2 3)$;
 - $\log_3(\log_5 2)$;
 - $\log_{0,5}(\log_3 2)$;
 - $\log_{0,5}(\log_2 3)$.
- Dana jest funkcja $f(x) = \log_3 x$.
 - Zbadaj, czy ciąg $(f(1), f(2), f(4), f(8), f(16), \dots)$ jest arytmetyczny. Jeśli tak, to znajdź jego różnicę.
 - Niech (a_1, a_2, a_3, \dots) będzie ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich i ilorazie q . Zbadaj, czy ciąg $(f(a_1), f(a_2), f(a_3), \dots)$ jest arytmetyczny. Jeśli tak, to znajdź jego różnicę.
- ^{8*} Dana jest funkcja $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Rozstrzygnij, która z liczb jest większa: $f(\log_5 6)$ czy $f(\log_5 4)$.
- Zbadaj, czy dla $x \in (0; 1)$ zachodzą nierówności:
 - $\log x < \log_2 x$;
 - $\log_x 2 < \log_x 4$;
 - $\log_x 0,0001 < 1$;
 - $\log_x(\log_x 5) < \log_x 3$;
 - $\log_x \frac{1}{x} < 0$;
 - $\log_{\frac{1}{x}} x > 0$.
- Znajdź odciętą punktu P wykresu funkcji $f(x) = \log_3(2x + 3)$, jeżeli rzędna tego punktu równa się:
 - 1; b) 2; c) 0,5; d) -2; e) 1.
 W jakich punktach wykres tej funkcji przecina osie OX i OY ?
- Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = (\log_2 x)^2$.

11. Równania (nierówności) logarytmiczne

Równania (nierówności), w których niewiadoma znajduje się pod znakiem logarytmu, nazywamy **równaniami (nierównościami) logarytmicznymi**.

Rozwiązywanie równań logarytmicznych opiera się głównie na dwóch metodach:

1. Przechodzeniu od równania $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ do równania $f(x) = g(x)$; równania te przy $a > 0$, $a \neq 1$ i $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ są równoważne, co wynika z różnowartościowości funkcji logarytmicznej (funkcja ta, jak wiemy, jest zawsze albo rosnąca, albo malejąca, a zatem różnowartościowa).
2. Wprowadzaniu nowych zmiennych.

Prześledźmy to na przykładach.

Przykład 1. Rozwiąż równanie $\log x + \log(x - 1) = \log 20$.

Rozwiązanie:

Równanie to ma sens, gdy $x > 0$ i $x - 1 > 0$, czyli $x > 1$. Dziedziną tego równania jest więc przedział $(1; +\infty)$. Równanie to jest w nim równoważne kolejno równaniom:

$$\log x(x - 1) = \log 20,$$

$$x(x - 1) = 20,$$

$$x^2 - x - 20 = 0.$$

Rozwiązując równanie kwadratowe, otrzymujemy liczby: $x_1 = -4$ i $x_2 = 5$, z których pierwsza nie należy do dziedziny naszego równania.

Odpowiedź: $x = 5$.

Przykład 2. Rozwiąż równanie $\log x - \log(x - 3) = \log 4$.

Rozwiązanie:

Dziedziną tego równania jest $\{x: x \in \mathbf{R} \text{ i } x > 0 \text{ i } x - 3 > 0\} = (3; +\infty)$.

W zbiorze tym równanie to jest równoważne równaniom:

$$\log \frac{x}{x - 3} = \log 4,$$

$$\frac{x}{x - 3} = 4,$$

$$x = 4(x - 3),$$

$$x = 4.$$

Oczywiście $4 \in (3; +\infty)$.

Odpowiedź: $x = 4$.

Przykład 3. Rozwiąż równanie $\log_4 \left\{ 2 \log_3 \left[1 + \log_2 (1 + \log_2 x) \right] \right\} = \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie:

Tym razem nie będziemy zaczynać rozwiązywania tego równania od wyznaczania jego dziedziny (byłoby to zbyt pracochłonne), lecz posłużymy się metodą **analizy starożytnych**.

Jeżeli liczba x spełnia podane równanie, to spełnia także kolejno następujące równania:

$$\log_4 \left\{ 2 \log_3 \left[1 + \log_2 (1 + \log_2 x) \right] \right\} = \log_4 2,$$

$$2 \log_3 \left[1 + \log_2 (1 + \log_2 x) \right] = 2,$$

$$\log_3 \left[1 + \log_2 (1 + \log_2 x) \right] = 1,$$

$$\log_3 \left[1 + \log_2 (1 + \log_2 x) \right] = \log_3 3,$$

$$1 + \log_2 (1 + \log_2 x) = 3,$$

$$\log_2 (1 + \log_2 x) = 2,$$

$$\log_2 (1 + \log_2 x) = \log_2 4,$$

$$1 + \log_2 x = 4,$$

$$\log_2 x = 3,$$

$$\log_2 x = \log_2 8,$$

$$x = 8.$$

Należy jeszcze sprawdzić, czy liczba ta rzeczywiście spełnia podane równanie. W tym celu wystarczy podstawić ją do wyjściowego równania.

Odpowiedź $x = 8$.

Przykład 4. Rozwiąż równanie $\log_{\frac{1}{3}}(x+10) + \log_{\frac{1}{3}}(7-2x) = -4$.

Rozwiązanie:

Dziedziną tego równania jest $\{x: x \in \mathbf{R} \text{ i } x+10 > 0 \text{ i } 7-2x > 0\} = \left(-10; \frac{7}{2}\right)$.

W zbiorze tym podane równanie jest równoważne kolejno równaniom:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+10)(7-2x) = \log_{\frac{1}{3}} 81,$$

$$(x+10)(7-2x) = 81,$$

$$2x^2 + 13x + 11 = 0.$$

Rozwiązując to równanie kwadratowe, otrzymujemy liczby: $x_1 = -\frac{11}{2}$, $x_2 = -1$, które należą do dziedziny danego równania:

Odpowiedź: $x_1 = -\frac{11}{2}$, $x_2 = -1$.

Przykład 5. Rozwiąż równanie $\log(x+5) + \log(x-4) = \log(x-3) + \log(x+2)$.

Rozwiązanie:

Równanie to ma sens dla tych x , dla których $x+5 > 0$, $x-4 > 0$, $x-3 > 0$ i $x+2 > 0$, czyli $x > 4$. Dziedziną tego równania jest więc przedział $(4; +\infty)$.

W zbiorze tym podane równanie jest równoważne kolejno równaniom:

$$\log(x+5)(x-4) = \log(x-3)(x+2),$$

$$(x+5)(x-4) = (x-3)(x+2),$$

$$x^2 + x - 20 = x^2 - x - 6,$$

$$2x = 14,$$

$$x = 7. \text{ Oczywiście } 7 \in (4; +\infty).$$

Odpowiedź: $x = 7$.

Przykład 6. Rozwiąż równanie $\log_{(x+2)} 16 = 2$.

Rozwiązanie:

Dziedziną tego równania jest

$$\{x: x \in \mathbf{R} \text{ i } x + 2 > 0 \text{ i } x + 2 \neq 1\} = (-2; -1) \cup (-1; +\infty).$$

W zbiorze tym podane równanie jest równoważne kolejno równaniom:

$$\log_{(x+2)} 16 = \log_{(x+2)} (x+2)^2,$$

$$(x+2)^2 = 16,$$

$$x+2 = 4, \text{ bo } x+2 > 0,$$

$$x = 2. \text{ Ponieważ } 2 \text{ należy do dziedziny równania, więc:}$$

Odpowiedź: $x = 2$.

Przykład 7. Rozwiąż równanie $6 - \log_2 x = 5\sqrt{\log_2 x}$.

Rozwiązanie:

Równanie rozwiążemy w zbiorze tych liczb rzeczywistych x , dla których $x > 0$ i $\log_2 x \geq 0$, czyli $x \geq 1$.

Dziedziną równania jest więc przedział $\langle 1; +\infty \rangle$. Podstawiając w podanym równaniu $\sqrt{\log_2 x} = y$, przechodzimy do równania $6 - y^2 = 5y$, czyli równania $y^2 + 5y - 6 = 0$, którego jedynym nieujemnym rozwiązaniem jest liczba $y = 1$. Z równości $\sqrt{\log_2 x} = 1$, otrzymujemy $\log_2 x = 1$ i ostatecznie $x = 2$. Liczba ta należy do dziedziny danego równania.

Odpowiedź: $x = 2$.

Przykład 8. Rozwiąż równanie $\frac{1}{5-4\log x} + \frac{4}{1+\log x} = 3$.

Rozwiązanie:

Dziedziną tego równania jest

$$\{x: x \in \mathbf{R} \text{ i } x > 0 \text{ i } 5 - 4\log x \neq 0 \text{ i } 1 + \log x \neq 0\} =$$

$$= \left\{ x: x \in \mathbf{R} \text{ i } x > 0 \text{ i } x \neq 10^{\frac{5}{4}} \text{ i } x \neq \frac{1}{10} \right\} =$$

$$= \left(0; \frac{1}{10}\right) \cup \left(\frac{1}{10}; 10^{\frac{5}{4}}\right) \cup \left(10^{\frac{5}{4}}; +\infty\right).$$

Podstawiając w podanym równaniu $\log x = t$, przechodzimy do równania:

$$\frac{1}{5-4t} + \frac{4}{1+t} = 3.$$

Rozwiązując je, otrzymujemy kolejno równania:

$$1+t+4(5-4t) = 3(5-4t)(1+t), \quad 21-15t = 15+3t-12t^2,$$

$$12t^2 - 18t + 6 = 0, \quad 2t^2 - 3t + 1 = 0.$$

Rozwiązaniami tego równania kwadratowego są liczby $t_1 = \frac{1}{2}$ i $t_2 = 1$.

Z równości $\log x = \frac{1}{2}$ i $\log x = 1$ otrzymujemy liczby $x_1 = 10^{\frac{1}{2}}$, $x_2 = 10$. Obie należą do dziedziny danego równania, stanowią więc jego rozwiązania.

Odpowiedź: $x_1 = \sqrt{10}$, $x_2 = 10$.

Rozwiązując nierówności logarytmiczne, korzystamy z monotoniczności funkcji logarytmicznej. Wiemy, że funkcja logarytmiczna o podstawie większej od 1 jest rosnąca, a o podstawie mniejszej od 1 – malejąca. Wobec tego nierówność $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ jest równoważna układowi nierówności:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x), \end{cases} \quad \text{a więc układowi } \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0, \end{cases} \quad \text{gdy } a > 1,$$

zaś układowi:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x), \end{cases} \quad \text{czyli układowi } \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0, \end{cases} \quad \text{gdy } 0 < a < 1.$$

Przykład 9. Rozwiąż nierówność $\log_3(x-1) > 2$.

Rozwiązanie:

Ponieważ podstawa logarytmu jest tutaj większa od 1, więc:

$$\log_3(x-1) > 2 \Leftrightarrow \log_3(x-1) > \log_3 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1 > 9 \end{cases} \Leftrightarrow x-1 > 9 \Leftrightarrow x > 10.$$

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(10; +\infty)$.

Przykład 10. Rozwiąż nierówność $\log_{\frac{1}{5}}(3x-2) > -2$.

Rozwiązanie:

Podstawa logarytmu jest tutaj dodatnia i mniejsza od 1, więc:

$$\log_{\frac{1}{5}}(3x-2) > -2 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{5}}(3x-2) > \log_{\frac{1}{5}} 25 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2 > 0 \\ 3x-2 < 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} < x < 9.$$

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(\frac{2}{3}; 9)$.

Przykład 11. Rozwiąż nierówność $\log(x+1) - \log x < 1$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \log(x+1) - \log x < 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x > 0 \\ \log(x+1) - \log x < \log 10 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log \frac{x+1}{x} < \log 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{x+1}{x} < 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x+1 < 10x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1 < 9x \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(\frac{1}{9}; +\infty)$.

Przykład 12. Rozwiąż nierówność $\log_{(2x-3)} x \leq 1$.

Rozwiązanie:

$$\log_{(2x-3)} x \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x - 3 > 0 \\ 2x - 3 \neq 1 \\ \log_{(2x-3)} x \leq \log_{(2x-3)}(2x-3) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x \neq 2 \\ \log_{(2x-3)} x \leq \log_{(2x-3)}(2x-3) \end{cases} \Leftrightarrow$$

(w zależności od tego, czy $0 < 2x - 3 < 1$, czy $2x - 3 > 1$)

$$\Leftrightarrow \left\{ \frac{3}{2} < x < 2 \vee \begin{cases} x > 2 \\ x \leq 2x - 3 \end{cases} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \frac{3}{2} < x < 2 \vee \begin{cases} x > 2 \\ x \geq 3 \end{cases} \right\} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < x < 2 \vee x \geq 3.$$

Odpowiedź. Zbiorem rozwiązań nierówności jest $\left(\frac{3}{2}; 2\right) \cup \langle 3; +\infty \rangle$.

Przykład 13. Rozwiąż nierówność $\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 - 6 \log_{\frac{1}{2}} x + 8 < 0$.

Rozwiązanie:

Dana nierówność ma sens, gdy $x > 0$. Podstawiając do niej $\log_{\frac{1}{2}} x = t$, otrzymujemy nierówność $t^2 - 6t + 8 < 0$. Rozwiązując ją w znany sposób, otrzymujemy $t > 2$ i $t < 4$.

Uwzględniając uczynione wcześniej podstawienie, dochodzimy do koniunkcji nierówności $\log_{\frac{1}{2}} x > 2$ i $\log_{\frac{1}{2}} x < 4$, czyli nierówności $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ i $\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$, a stąd – do nierówności $x < \frac{1}{4}$ i $x > \frac{1}{16}$.

Oczywiście wszystkie liczby x takie, że $\frac{1}{16} < x < \frac{1}{4}$, są dodatnie.

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań danej nierówności jest przedział $\left(\frac{1}{16}; \frac{1}{4}\right)$.

Przykład 14. Rozwiąż nierówność $\log_{(x-3)} \frac{x-2}{x-4} \geq 1$.

Rozwiązanie:

$$\log_{(x-3)} \frac{x-2}{x-4} \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-2}{x-4} > 0 \\ x-3 > 0 \\ x-3 \neq 1 \\ \log_{(x-3)} \frac{x-2}{x-4} \geq \log_{(x-3)}(x-3) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4 > 0 \\ x-3 \neq 1 \\ \log_{(x-3)} \frac{x-2}{x-4} \geq \log_{(x-3)}(x-3) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ \frac{x-2}{x-4} \geq x-3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x-2 \geq (x-3)(x-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x^2 - 8x + 14 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ 4 - \sqrt{2} \leq x \leq 4 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 < x \leq 4 + \sqrt{2}.$$

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań danej nierówności jest przedział $(4; 4 + \sqrt{2}]$.



Pytania i zadania

1. Rozwiąż równania:

a) $\log_2 x = -3$;

b) $\log_{16} x = -\frac{1}{2}$;

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) = -1$;

d) $\log_2 x^2 = 2$;

e) $\log_{\frac{1}{4}} x^2 = 1$;

f) $\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}}(3-x)$.

2. Rozwiąż równania:

a) $\log_x 27 = -3$;

b) $\log_x 16 = 4$;

c) $\log_4 x + \log_4(x+2) = \log_4 3x$;

d) $\log_{\frac{1}{3}} 3x + \log_{\frac{1}{3}} x = 3$; e) $\log_3(x+1) = \log_3(2x-3)$; f) $\log_2(x+1)^2 = 1 - \log_2 3$.

3. Rozwiąż równania:

a) $\log_2 |x+1| = -1$;

b) $\log_2 x = -\log_4 x$;

c) $\log_2 x = \log_2(6-x^2)$;

d) $\log_3 x + \log_x 3 = 2$;

e) $\log(7x-9) + \log(3x-4) = 1$.

4. Rozwiąż równania:

a) $\frac{1}{5-\log x} + \frac{2}{1+\log x} = 1$;

b) $\log(5-x) = -2\log\sqrt{x-3}$;

c) $\log_{0,5}(15-x) - \log_{0,5}(1-x) = -3$;

d) $\frac{\log 2x}{\log(4x-15)} = 2$.

5. Rozwiąż nierówności:

a) $\log_5 x < 1$;

b) $\log_{\frac{1}{5}} x > 1$;

c) $\log_2 x^2 < 2$;

d) $\log_{\frac{1}{3}} x^2 > 0$;

e) $\log_3 x^2 < 2$;

f) $\log_2(x+3) < 2$;

g) $\log_x 32 > 5$;

h) $\log_4 x + \log_8 x < 0$.

6. Rozwiąż nierówności:

a) $\log_2(x^2 - 5x + 5) > 0$;

b) $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_2 x^2} > 1$;

c) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x < 2$;

d) $\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2 - 4\log_{\frac{1}{3}} x + 3 < 0$.

7. Rozwiąż nierówności:

a) $\log_{\frac{1}{2}}(5 + 4x - x^2) > -3$;

b) $\log_x(x-1) \geq 2$;

c) $\log_x \frac{x+3}{x-1} > 1$;

d) $\log_{\frac{x-1}{x+5}} 0,3 > 0$;

e) $\log(x^2-3) 729 > 3$;

f) $\log_{0,2}(x-1) > 4$.

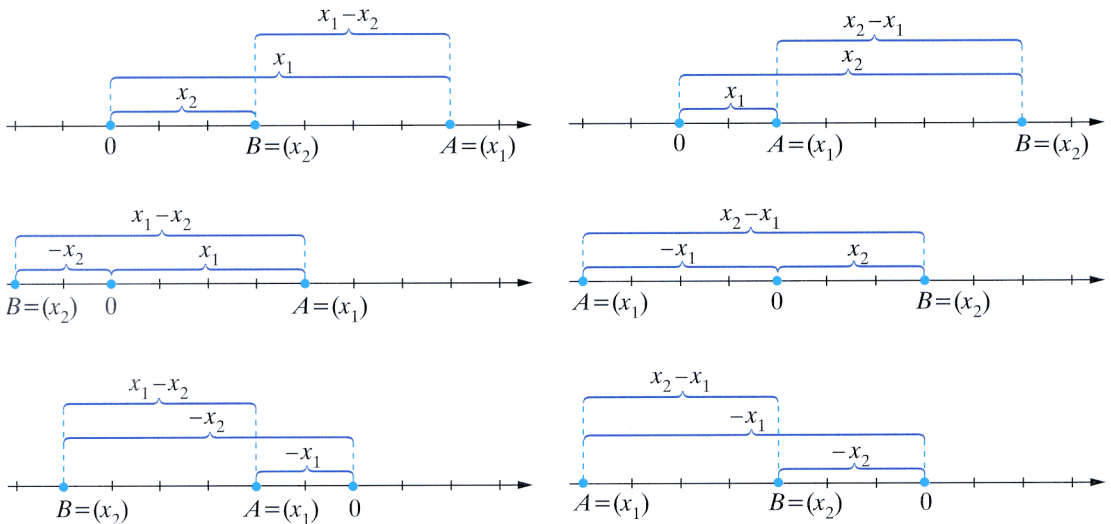
II. Elementy geometrii analitycznej

1. Odległość dwóch punktów na płaszczyźnie współrzędnych

O odległości dwóch punktów na osi liczbowej i na płaszczyźnie współrzędnych mówiliśmy w klasie pierwszej. Przypomnijmy te wiadomości.

Niech punkty A i B mają na osi liczbowej współrzędne odpowiednio x_1 i x_2 . Wówczas ich odległość AB na tej osi obliczamy ze wzoru (dowód na ryc. 2.1):

$$(*) AB = \begin{cases} x_1 - x_2, & \text{gdy } x_1 \geq x_2, \\ x_2 - x_1, & \text{gdy } x_1 < x_2. \end{cases}$$



Ryc. 2.1.

Wzór (*) zapisujemy krócej:

Jeśli $A = (x_1)$ i $B = (x_2)$, to $AB = |x_1 - x_2|$.



Rozważmy teraz na płaszczyźnie współrzędnych, punkty A i B o współrzędnych odpowiednio x_1, y_1 i x_2, y_2 , to znaczy niech:

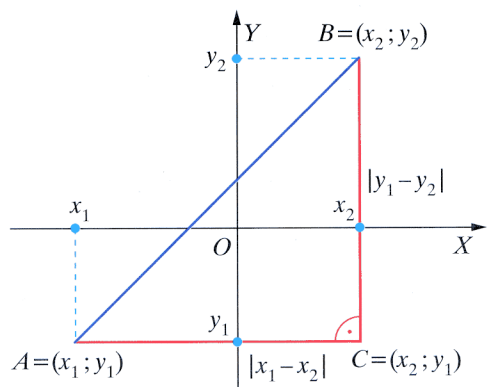
$$A = (x_1; y_1) \text{ i } B = (x_2; y_2).$$

Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta ABC (ryc. 2.2), otrzymujemy wówczas:

$$AB^2 = |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2, \text{ czyli:}$$

$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, \text{ gdyż } |x|^2 = x^2$$

$$\text{i ostatecznie } AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$



Ryc. 2.2.

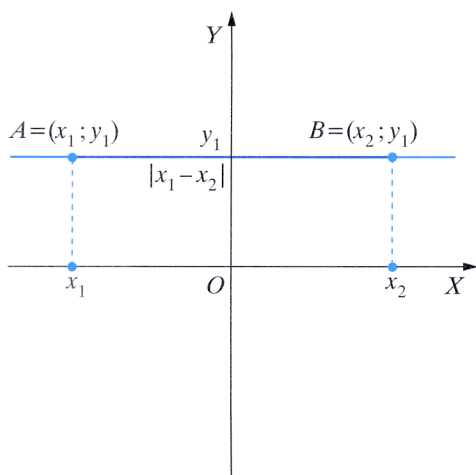
Zachodzi więc następujące twierdzenie:

Twierdzenie

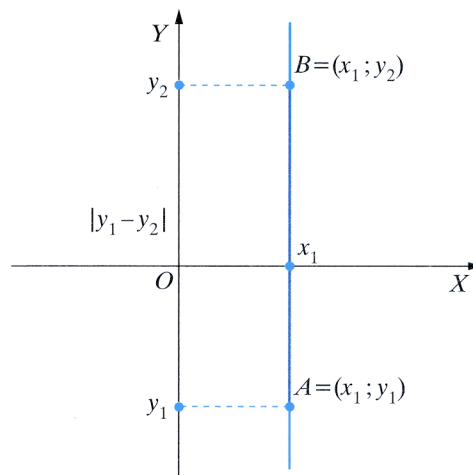
Jeżeli $A = (x_1; y_1)$ i $B = (x_2; y_2)$, to (*) $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Wzór (*) wyraża odległość dwóch punktów na płaszczyźnie współrzędnych.

Gdy punkty A i B leżą na prostej równoległej do osi OX , wzór (*) przybiera postać $AB = |x_1 - x_2|$ (ryc. 2.3). Jeśli zaś punkty A i B leżą na prostej równoległej do osi OY , wówczas wzór (*) ma postać $AB = |y_1 - y_2|$ (ryc. 2.4).



Ryc. 2.3.



Ryc. 2.4.

Przykład 1. Oblicz długość odcinka AB , gdy $A = (2; -1)$, $B = (-4; 7)$.

Rozwiązanie:

Ze wzoru na odległość dwóch punktów otrzymujemy:

$$AB = \sqrt{(2 - (-4))^2 + (-1 - 7)^2} = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10.$$

Przykład 2. Oblicz obwód trójkąta ABC o wierzchołkach: $A = (4; 0)$, $B = (2; 4)$, $C = (-2; -2)$.

Rozwiązanie:

Najpierw obliczamy długości boków tego trójkąta:

$$AB = \sqrt{(4 - 2)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5},$$

$$BC = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (4 - (-2))^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13},$$

$$CA = \sqrt{(-2 - 4)^2 + (-2 - 0)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{10}.$$

Obwód trójkąta wynosi: $AB + BC + CA = 2(\sqrt{5} + \sqrt{13} + \sqrt{10})$.

Przykład 3. Dane są punkty $A = (x_1; y_1)$ i $B = (x_2; y_2)$. Udowodnij, że punkt $P = \left(\frac{x_1 + 2x_2}{3}; \frac{y_1 + 2y_2}{3}\right)$ należy do odcinka AB i dzieli go w stosunku 2:1.

Rozwiązanie:

Należy dowieść, że:

- $AP + PB = AB$ (wtedy bowiem punkt P należy do odcinka AB),
- $AP = 2PB$.

Korzystając ze wzoru na odległość dwóch punktów, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{\left(x_1 - \frac{x_1 + 2x_2}{3}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{y_1 + 2y_2}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2x_1 - 2x_2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2y_1 - 2y_2}{3}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 \left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right)} = \frac{2}{3} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \frac{2}{3} AB, \\ PB &= \sqrt{\left(\frac{x_1 + 2x_2}{3} - x_2\right)^2 + \left(\frac{y_1 + 2y_2}{3} - y_2\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{x_1 - x_2}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_2}{3}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 \left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right)} = \frac{1}{3} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \frac{1}{3} AB. \end{aligned}$$

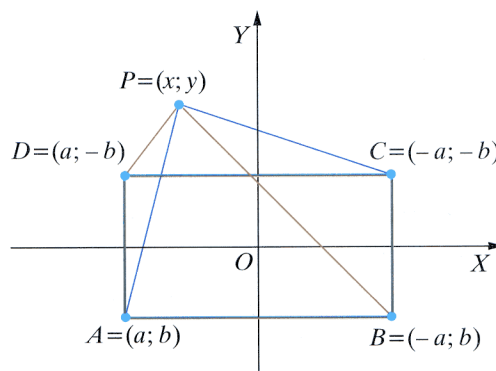
Zatem $AP + PB = AB$ oraz $AP = 2PB$.

Przykład 4. Udowodnij, że suma kwadratów odległości dowolnego punktu P od wierzchołków A i C prostokąta $ABCD$ jest równa sumie kwadratów odległości tego punktu od wierzchołków B i D .

Rozwiązanie:

Obierzmy taki układ współrzędnych, aby jego osie były osiami symetrii prostokąta $ABCD$ (ryc. 2.5). Wówczas, gdy $A = (a; b)$, to $B = (-a; b)$, $C = (-a; -b)$, $D = (a; -b)$ i dla dowolnego punktu $P = (x; y)$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} PA^2 + PC^2 &= (x - a)^2 + (y - b)^2 + (x + a)^2 + (y + b)^2 = \\ &= (x + a)^2 + (y - b)^2 + (x - a)^2 + (y + b)^2 = PB^2 + PD^2. \end{aligned}$$



Ryc. 2.5.

Pytania i zadania

- Podaj wzór na odległość punktów A i B :
 - na osi liczbowej;
 - na płaszczyźnie współrzędnych.
- Oblicz długość odcinka AB , gdy:
 - $A = (-2)$, $B = (7)$;
 - $A = (2 - \sqrt{2})$, $B = (-2 - 5\sqrt{2})$.



3. Oblicz długość odcinka AB , gdy:

a) $A = (-3; 2)$, $B = (6; -10)$;

b) $A = (1; 2)$, $B = (4; -3)$.

4. Wykaż, że punkt $P = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$ jest środkiem odcinka AB , gdzie $A = (x_1; y_1)$, $B = (x_2; y_2)$.

5. Znajdź długości środkowych trójkąta ABC , w którym: $A = (-1; 2)$, $B = (3; 4)$ i $C = (-2; 5)$.

6*. Wykaż, że punkt $P = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$ jest środkiem ciężkości trójkąta ABC , w którym $A = (x_1; y_1)$, $B = (x_2; y_2)$ i $C = (x_3; y_3)$.

7. Dany jest kwadrat $ABCD$. Niech S będzie jego środkiem, a M – dowolnym punktem. Udowodnij, że wartość wyrażenia $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 - 4MS^2$ jest stała.

8. Udowodnij, że w każdym trójkącie suma kwadratów długości środkowych jest równa $\frac{3}{4}$ sumy kwadratów długości boków.

2. Równanie okręgu, nierówność koła

Wiemy, że okręgiem o środku S i promieniu długości r nazywamy zbiór punktów płaszczyzny, których odległości od punktu S są równe r . Niech punkt $P = (x; y)$ będzie dowolnym punktem okręgu o środku $S = (a; b)$ i promieniu długości r . Zatem $SP = r$ i z wzoru na odległość dwóch punktów otrzymujemy równanie $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$, czyli równanie

$$(*) (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Równanie (*) przedstawia okrąg o środku $S = (a; b)$ i promieniu długości r .

Punkt $P = (x; y)$ należy do okręgu o środku $S = (a; b)$ i promieniu długości r wtedy i tylko wtedy, gdy jego współrzędne x i y spełniają równanie (*) tego okręgu (ryc. 2.6).

Na przykład:

– równanie $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ przedstawia okrąg o środku $S = (2; -1)$ i promieniu $r = 3$,

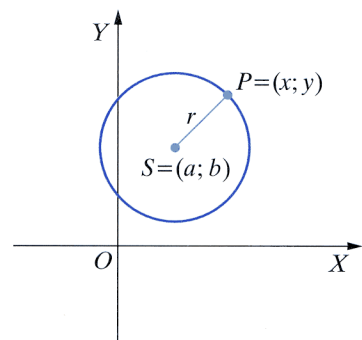
– równanie $x^2 + (y-1)^2 = 4$ jest równaniem okręgu o środku $S = (0; 1)$ i promieniu $r = 2$,

– równanie $x^2 + y^2 = 5$ przedstawia okrąg o środku $S = (0; 0)$ i promieniu $r = \sqrt{5}$.

Równaniu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ możemy nadać równoważną postać:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

Oznaczając $a^2 + b^2 - r^2$ literą c , otrzymamy równanie: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, na przykład:



Ryc. 2.6.

– równanie $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ przybiera postać $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$,

– równanie $x^2 + (y-2)^2 = 4$ ma równoważną postać $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

Powstaje pytanie: Czy równanie $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ przedstawia okrąg dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b i c ?

Ponieważ jest ono równoważne równaniu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 - c$, więc:

1. Jeżeli $a^2 + b^2 - c > 0$, to istnieje liczba dodatnia r taka, że $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$; równanie to jest wtedy równoważne równaniu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ i rzeczywiście opisuje okrąg.
2. Jeżeli $a^2 + b^2 - c = 0$, to równanie $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 - c$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x = a, y = b$, więc przedstawia ono zbiór jednoelementowy $\{(a; b)\}$.
3. Gdy wreszcie $a^2 + b^2 - c < 0$, to równanie $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 - c$ jest sprzeczne, gdyż jego lewa strona jest nieujemna dla dowolnych liczb x i y .

Tym samym udowodniliśmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Równanie $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ opisuje okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 - c > 0$; promieniem tego okręgu jest liczba $\sqrt{a^2 + b^2 - c}$, a środkiem – punkt $(a; b)$.

Oto przykłady równań i opisanych nimi okręgów:

– równanie $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ przedstawia okrąg o środku $(-1; 2)$ i promieniu

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 4} = 3,$$

– równanie $x^2 + y^2 - x + y = 0$ opisuje okrąg o środku $(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ i promieniu

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 0} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Przykład 1. Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC , w którym: $A = (-1; 0)$, $B = (7; 0)$, $C = (0; 1)$.

Rozwiązanie:

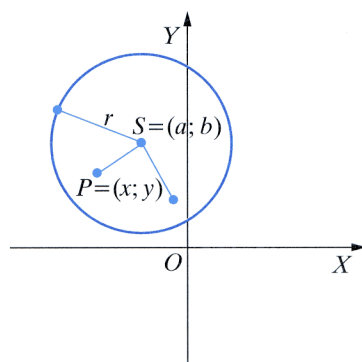
Zadanie sprowadza się do wyznaczenia takich współczynników a, b, c równania $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, aby było ono spełnione przez współrzędne każdego z wierzchołków danego trójkąta. Podstawiając do tego równania współrzędne punktów A, B i C , otrzymujemy odpowiednio równania:

$$1 + 0 + 2a - 0 + c = 0, \quad 49 + 0 - 14a - 0 + c = 0, \quad 0 + 1 - 0 - 2b + c = 0,$$

czyli układ równań:
$$\begin{cases} 2a + c = -1 \\ 14a - c = 49 \\ 2b - c = 1. \end{cases}$$

Z otrzymanego układu równań obliczamy a , b i c : $a = 3$, $b = -3$, $c = -7$. Zatem równanie okręgu ma postać: $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 7 = 0$. Środkiem tego okręgu jest punkt $(3; -3)$, a jego promień ma długość $\sqrt{3^2 + (-3)^2 + 7} = 5$.

Wiemy, że kołem o środku S i promieniu długości r nazywamy zbiór punktów płaszczyzny, których odległości od punktu S są nie większe niż r . Punkt $P = (x; y)$ należy więc do koła o środku $S = (a; b)$ i promieniu r wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi nierówność $SP \leq r$ (ryc. 2.7). Z tej nierówności i ze wzoru na odległość dwóch punktów otrzymujemy nierówność $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq r$, czyli nierówność $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$.



Ryc. 2.7.

Przedstawia ona koło o środku $(a; b)$ i promieniu długości r , na przykład:

- nierówność $(x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 3$ opisuje koło o środku $(2; -1)$ i promieniu $\sqrt{3}$,
- nierówność $x^2 + y^2 \leq 1$ opisuje koło o środku $(0; 0)$ i promieniu 1.

Wniosek. Nierówność $(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$ przedstawia wnętrze koła o środku $(a; b)$ i promieniu r , a nierówność $(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$ opisuje zewnątrz koła o środku $(a; b)$ i promieniu r .

Przykład 2. Zbadaj, czy punkt $P = (-3; 5)$ leży wewnątrz, na zewnątrz czy też na okręgu koła opisanego nierównością $(x-4)^2 + y^2 \leq 16$.

Rozwiązanie:

Obliczamy najpierw odległość punktu P od środka S tego koła. Ponieważ $P = (-3; 5)$, zaś $S = (4; 0)$, więc $PS = \sqrt{(-3-4)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{(-7)^2 + 5^2} = \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74}$. Promień koła ma długość 4, a $PS > 4$, z czego wynika, że dany punkt leży na zewnątrz koła.

Pytania i zadania

1. Podaj równanie, które przedstawia okrąg o środku $(a; b)$ i promieniu r , oraz nierówność opisującą koło o środku w tym punkcie i o tym promieniu.
2. Jaką figurę opisuje:
 - a) równanie $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 4$;
 - b) nierówność $(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 1$;
 - c) nierówność $(x+1)^2 + (y+2)^2 \geq 2$;
 - d) nierówność $x^2 + y^2 < 4$;
 - e) nierówność $(x-1)^2 + y^2 > 5$;
 - f) równanie $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 0$?

3. Napisz równanie okręgu o środku S i promieniu długości r , gdy:
- $S = (-2; 1), r = \sqrt{3}$;
 - $S = (0, -2), r = 4$;
 - $S = (-1; 0), r = \sqrt{2}$.
4. Wyznacz środek i promień okręgu o równaniu:
- $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$;
 - $x^2 + y^2 + 6x = 0$;
 - $x^2 + y^2 - 6y + 8 = 0$.
5. Jaką figurę opisuje nierówność:
- $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 < 0$; b) $x^2 + y^2 - 6y > 0$;
 - $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 \leq 0$; d) $x^2 + y^2 - 4x \geq 0$?
6. Znajdź równanie, środek i promień okręgu opisanego na trójkącie ABC , gdy:
- $A = (1; 0), B = (0; 2), C = (1; 4)$; b) $A = (7; -1), B = (5; 3), C = (-1; -5)$.
7. Napisz równanie okręgu współśrodkowego z okręgiem o równaniu $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ i przechodzącego przez punkt $P = (-4; -4)$.
8. Napisz równanie okręgu:
- o środku $S = (1; -3)$ i przechodzącego przez punkt $P = (3; 5)$;
 - o promieniu $r = \sqrt{26}$ i przechodzącego przez punkty $P = (2; 7)$ i $Q = (-2; 1)$;
 - o promieniu $r = 3$ i stycznego do obu osi układu współrzędnych.
9. Napisz równanie okręgu opisanego na prostokącie $ABCD$ o wierzchołkach:
 $A = (-3; -3), B = (5; -3), C = (5; 1), D = (-3; 1)$.
10. Wykaż, że są styczne okręgi o równaniach:
- $x^2 + y^2 - 2x = 0, x^2 + y^2 - 12x + 24y + 36 = 0$;
 - $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0, x^2 + y^2 + 4x - 4y - 56 = 0$.
- 11*. Oblicz pole figury F , która jest zbiorem punktów $(x; y)$ spełniających nierówność $x^2 + y^2 \leq 2(|x| + |y|)$.
12. Wykaż, że okręgi o równaniach $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 29 = 0$ i $x^2 + y^2 + x - y - 26 = 0$ przecinają się, i znajdź współrzędne ich punktów przecięcia.
- 13*. Wykaż, że punkty: $A = (1; 0), B = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), C = \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), D = (-1; 0), E = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,
 $F = \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ są kolejnymi wierzchołkami sześciokąta foremnego. Napisz równania okręgu:
- wpisanego w ten sześciokąt,
 - opisanego na tym sześciokącie.

3. Prosta na płaszczyźnie współrzędnych

Omawiając w klasie pierwszej wykres funkcji liniowej, przyjęliśmy bez dowodu następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.

Każde równanie liniowe z dwiema niewiadomymi x i y , czyli równanie postaci:

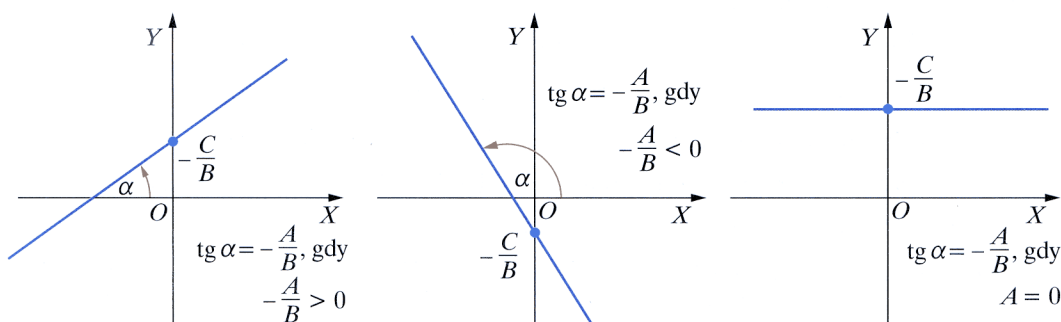
$$(*) Ax + By + C = 0,$$

w którym obie liczby A i B nie są jednocześnie równe zero (co można zapisać: $A^2 + B^2 \neq 0$), przedstawia pewną prostą.

Udowodnimy je teraz.

□ Dowód. Rozpatrzmy dwa przypadki:

1. Gdy $B \neq 0$, to równaniu $(*)$ możemy nadać postać $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, która jest wzorem funkcji liniowej o współczynniku kierunkowym $m = -\frac{A}{B}$ i wyrazie wolnym $n = -\frac{C}{B}$; jej wykresem jest, jak wiemy, prosta nachylona do osi OX pod takim kątem α , że $\operatorname{tg} \alpha = m$. Prosta ta przecina oś OY w punkcie, którego rzędna równa jest $-\frac{C}{B}$ (ryc. 2.8).

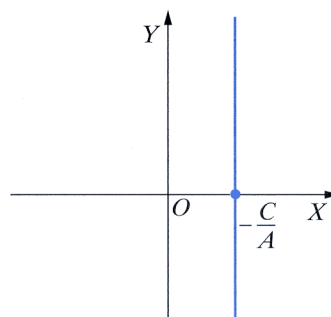


Ryc. 2.8.

2. Gdy $B = 0$, wtedy $A \neq 0$ i równanie $(*)$, równoważne równaniu $x = -\frac{C}{A}$, przedstawia prostą równoległą do osi OY i przecinającą oś OX w punkcie o odciętej równej $-\frac{C}{A}$ (ryc. 2.9). □

Równanie $(*)$ nazywamy **ogólnym równaniem prostej**.

Prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne, a mianowicie:



Ryc. 2.9.

Twierdzenie 2.

Każdą prostą płaszczyzny opisuje pewne równanie liniowe z dwiema niewiadomymi x i y .

□ Dowód. Rozważmy na płaszczyźnie współrzędnych dwa różne punkty: $A = (x_1; y_1)$ i $B = (x_2; y_2)$ i poprowadźmy przez nie prostą l .

Punkt $P = (x; y)$ leży na prostej l wtedy i tylko wtedy, gdy wektory \vec{AP} i \vec{AB} są równoległe, co z kolei oznacza istnienie takiej liczby rzeczywistej λ różnej od zera, że zachodzi równość $\vec{AP} = \lambda \cdot \vec{AB}$ (ryc. 2.10). Ponieważ $\vec{AP} = [x - x_1; y - y_1]$, zaś $\vec{AB} = [x_2 - x_1; y_2 - y_1]$, więc:

$$\begin{aligned} \vec{AP} = \lambda \cdot \vec{AB} &\Leftrightarrow [x - x_1; y - y_1] = \lambda \cdot [x_2 - x_1; y_2 - y_1] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x - x_1 = \lambda \cdot (x_2 - x_1) \text{ i } y - y_1 = \lambda \cdot (y_2 - y_1). \end{aligned}$$

Punkty A i B są różne, zatem $x_2 - x_1 \neq 0$ lub $y_2 - y_1 \neq 0$. Wyznaczając λ z jednego z ostatnich dwóch równań i podstawiając do drugiego, otrzymamy równanie:

$$(1) (y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0.$$

Jest ono równaniem liniowym z niewiadomymi x i y (gdyż współczynniki przy x i y równe odpowiednio $y_2 - y_1$ i $-(x_2 - x_1)$ nie są jednocześnie zerem), opisującym prostą l przechodzącą przez dowolnie obrane dwa różne punkty A i B . □ Na przykład:

– prosta wyznaczona przez punkty $A = (-2; 3)$ i $B = (1; 5)$ ma równanie

$$(5 - 3)(x + 2) - (1 + 2)(y - 3) = 0, \text{ czyli równanie } 2x - 3y + 13 = 0;$$

– prosta wyznaczona przez punkty $A = (0; 0)$ i $B = (1; 1)$ ma równanie

$$(1 - 0)(x - 0) - (1 - 0)(y - 0) = 0, \text{ czyli równanie}$$

$$x - y = 0.$$

Gdy prosta AB jest równoległa do osi OY , co zachodzi wtedy, gdy odcięte punktów A i B są równe (ryc. 2.11), gdy $x_1 = x_2 = a$, wtedy jej równanie (1) przybiera postać $(y_2 - y_1)(x - a) = 0$, czyli postać:

$$(2) x = a, \text{ bo } y_2 - y_1 \neq 0.$$

Na odwrót, każde równanie postaci (2) przedstawia prostą równoległą do osi OY ; spełniają je bowiem wszystkie punkty o odciętej $x = a$ i dowolnej rzędnej y . Prosta o równaniu (2) przecina oś OX w punkcie $(a; 0)$.

Równanie $x = 0$ jest równaniem osi OY .

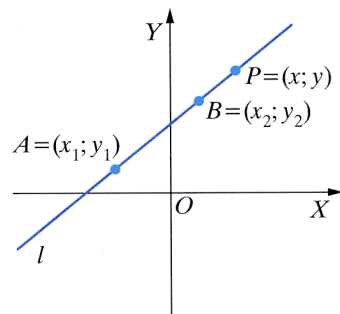
Jeśli natomiast prosta AB nie jest równoległa do osi OY , czyli gdy $x_1 \neq x_2$, wtedy równanie:

(1) jest równoważne równaniu

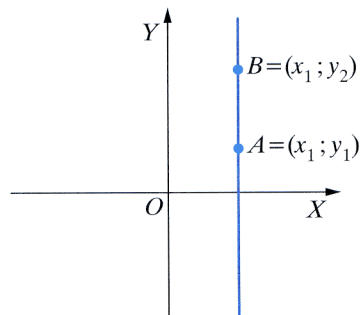
$$(3) y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Oznaczając występujący w nim współczynnik $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, zwany **współczynnikiem kierunkowym**, przez m , możemy temu równaniu nadać postać:

$$(4) y - y_1 = m(x - x_1).$$



Ryc. 2.10.



Ryc. 2.11.

Na odwrót, każde równanie tej postaci opisuje prostą o współczynniku kierunkowym m , przechodzącą przez punkt $(x_1; y_1)$. Wystarczy dla dowolnych liczb x_1, y_1 i m przyjąć na przykład $x_2 = x_1 + 1, y_2 = y_1 + m$. Wtedy bowiem $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, a równanie (4) ma postać (3). Gdy punkt $(x_1; y_1)$ leży na osi OY , co oznacza, że $x_1 = 0$, a y_1 równa się dowolnej liczbie n , wówczas równanie (4) przybiera postać $y - n = m \cdot x$, czyli:

$$(5) y = mx + n.$$

Równanie tej postaci nazywamy **równaniem kierunkowym** prostej.

Przyjmując w nim $n = 0$, otrzymujemy równanie $y = mx$, zwane równaniem kierunkowym prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych. Gdy zaś $m = 0$, wtedy równanie (5) przybiera postać $y = n$ i przedstawia prostą równoległą do osi OX ; w przypadku, gdy także $n = 0$, równanie (5) ma postać $y = 0$ i opisuje oś OX .



Pytania i zadania

- Kiedy równanie $Ax + By + C = 0$ z niewiadomymi x i y opisuje prostą?
- Omów równanie prostej przechodzącej przez dwa różne punkty: $(x_1; y_1)$ i $(x_2; y_2)$.
- Podaj równanie osi:
 - OX ;
 - OY .
- Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty:
 - $(-3; 1)$ i $(1; 3)$;
 - $(2; -1)$ i $(-2; 1)$;
 - $(0; 0)$ i $(1; 1)$.
- Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt P i nachylonej do osi OX pod kątem α , gdy:
 - $P = (1; 1), \alpha = 45^\circ$;
 - $P = (-2; 1), \alpha = 30^\circ$;
 - $P = (-1; 1), \alpha = 135^\circ$;
 - $P = (-1; -1), \alpha = 150^\circ$.
- Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt P i o współczynniku kierunkowym m , gdy:
 - $P = (1; 3), m = -\frac{3}{2}$;
 - $P = (2; -1), m = -1$;
 - $P = (-1; 1), m = 1$;
 - $P = \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), m = \sqrt{3}$.
- Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $(0; -1)$ i równoległej:
 - do prostej o równaniu $y = -x$;
 - do prostej o równaniu $y = -2x + 1$;

- c) do osi OX ;
 d) do osi OY .
8. Dane są trzy wierzchołki: $A = (1; -2)$, $B = (4; 0)$, $C = (2; 4)$ równoległoboku $ABCD$. Napisz równania prostych zawierających:
 a) jego boki;
 b) jego przekątne.
9. Wykaż, że punkty:
 a) $(-3; 1)$, $(1; 3)$, $(7; 6)$;
 b) $(-5; -4)$, $(1; 3)$, $(13; 17)$
 leżą na jednej prostej. Napisz równanie tej prostej.

4. Prostopadłość i równoległość pary prostych na płaszczyźnie współrzędnych

W podrozdziale tym określimy warunek konieczny i dostateczny na to, aby dwie proste opisane na płaszczyźnie współrzędnych równaniami ogólnymi były:

- a) prostopadłe,
 b) równoległe.

Przedtem jednak przypomnijmy kilka właściwości dotyczących wektorów.

Wiemy, że gdy dane są na płaszczyźnie współrzędnych dwa wektory: $\vec{u} = [a_1; a_2]$ i $\vec{v} = [b_1; b_2]$, to ich iloczyn skalarny $\vec{u} \circ \vec{v}$ możemy obliczać ze wzoru:

$$\vec{u} \circ \vec{v} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Dwa wektory niezerowe są prostopadłe, gdy ich iloczyn skalarny jest równy zeru:

$$(*) \quad \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

Dwa wektory niezerowe są równoległe, gdy jeden z nich jest iloczynem drugiego i pewnej liczby rzeczywistej, różnej od zera:

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \exists_{t \neq 0} \vec{u} = t \cdot \vec{v}.$$

Gdy $\vec{u} = [a_1; a_2]$, $\vec{v} = [b_1; b_2]$, to:

$\vec{u} = t \cdot \vec{v} \Leftrightarrow [a_1; a_2] = [t b_1; t b_2] \Leftrightarrow a_1 = t b_1$ i $a_2 = t b_2$, co gdy $b_1 \neq 0$ i $b_2 \neq 0$ można zapisać równoważnie: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = t$.

Tak więc, gdy $\vec{u} = [a_1; a_2]$ i $\vec{v} = [b_1; b_2]$ oraz $b_1 \neq 0$ i $b_2 \neq 0$, to:

$$(**) \quad \vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0.$$

Warunki (*) i (**) posłużą nam do określenia warunków, odpowiednio, prostopadłości i równoległości pary prostych o równaniach w postaci ogólnej.

Zanim jednak to nastąpi, udowodnijmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie

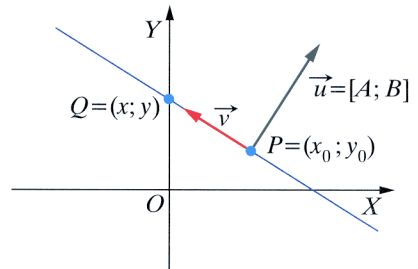
Wektor $\vec{u} = [A; B]$ jest prostopadły do prostej l o równaniu $Ax + By + C = 0$.

□ Dowód. Niech $P = (x_0; y_0)$ będzie dowolnym punktem prostej l (ryc. 2.12); zachodzi wówczas równość $Ax_0 + By_0 + C = 0$.

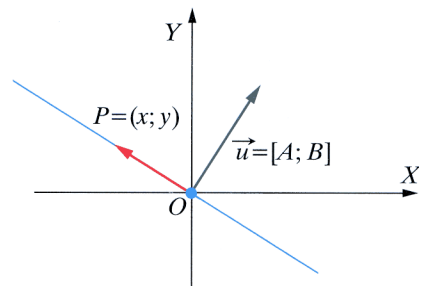
Wobec tego równanie prostej l możemy zapisać w postaci $Ax + By + C - (Ax_0 + By_0 + C) = 0$, czyli równoważnie: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Otrzymana równość wyraża warunek prostopadłości wektorów $\vec{u} = [A; B]$ i $\vec{v} = [x - x_0; y - y_0]$, gdzie \vec{v} jest pewnym wektorem \overrightarrow{PQ} prostej l . □

Gdy prosta l przechodzi przez początek układu współrzędnych, to opisując ją równanie $Ax + By = 0$ jest zarazem warunkiem prostopadłości wektorów $\vec{u} = [A; B]$ i $\overrightarrow{OP} = [x; y]$ (ryc. 2.13). Na przykład:

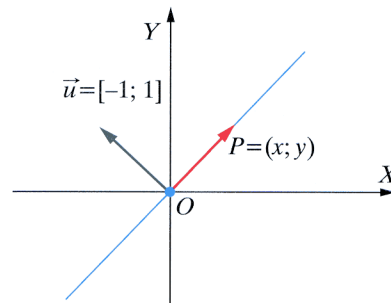
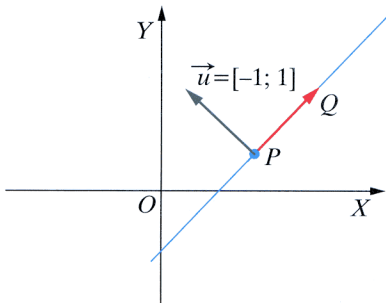
– wektor $\vec{u} = [-1; 1]$ jest prostopadły do prostych o równaniach ogólnych $-x + y + 1 = 0$, $-x + y = 0$ (ryc. 2.14);



Ryc. 2.12.



Ryc. 2.13.



Ryc. 2.14.

– wektor $\vec{u} = [1; 1]$ jest prostopadły do prostych o równaniach ogólnych $x + y - 2 = 0$, $x + y = 0$ (wykonaj odpowiednie ryciny).

Z udowodnionego twierdzenia wynikają następujące wnioski:

Wniosek 1. Proste o równaniach ogólnych $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Wniosek 2. Proste o równaniach ogólnych $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, co jest równoważne alternatywnie:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \text{ lub } A_1 = A_2 = 0 \text{ lub } B_1 = B_2 = 0.$$

Podane w obu wnioskach warunki są również warunkami prostopadłości i równoległości wektorów $\vec{u} = [A_1; B_1]$ i $\vec{v} = [A_2; B_2]$, prostopadłych do prostych o równaniach odpowiednio $A_1x_2 + B_1y_2 + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Tak więc:

Równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$ ma postać $Ax + By + D = 0$, a równanie prostej prostopadłej do niej postać $-Bx + Ay + E = 0$.

Przykład 1. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P = (1; 1)$ i prostopadłej do prostej o równaniu $2x - y + 1 = 0$.

Rozwiązanie:

Proste prostopadłe do prostej o równaniu $2x - y + 1 = 0$ mają równanie $x + 2y + C = 0$, gdzie C jest dowolną liczbą. Podstawiając do tego równania współrzędne punktu P , otrzymujemy równość: $1 + 2 \cdot 1 + C = 0$, czyli $C = -3$.

Odpowiedź: Szukana prosta ma równanie $x + 2y - 3 = 0$.

Przykład 2. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $Q = (-1; 2)$ i równoległej do prostej o równaniu $x - 2y - 1 = 0$.

Rozwiązanie:

Proste równoległe do prostej o równaniu $x - 2y - 1 = 0$ opisuje równanie postaci $x - 2y + C = 0$, gdzie C jest dowolną liczbą. Podstawiając do tego równania współrzędne punktu Q , otrzymujemy równość $-1 - 2 \cdot 2 + C = 0$, a stąd $C = 5$.

Odpowiedź: Poszukiwana prosta ma równanie $x - 2y + 5 = 0$.

Przykład 3. Napisz równanie symetralnej odcinka AB , gdy $A = (-2; 1)$ i $B = (4; -3)$.

Rozwiązanie:

Sposób pierwszy. Ponieważ wektor $\vec{AB} = [6; -4]$ jest równoległy do prostej AB , więc jest prostopadły do symetralnej odcinka AB . Zatem równanie tej symetralnej ma postać $6x - 4y + C = 0$. Podstawiając do tego równania współrzędne środka $S = (1; -1)$ odcinka AB , znajdujemy: $C = -10$, a co za tym idzie szukane równanie symetralnej: $3x - 2y - 5 = 0$.

Sposób drugi. Należy napisać równanie prostej prostopadłej do prostej AB i przechodzącej przez środek odcinka AB .

Prosta AB ma równanie $y - 1 = \frac{-3 - 1}{4 - (-2)} \cdot (x - (-2))$, czyli równanie $y - 1 = -\frac{2}{3}(x + 2)$,

a więc równanie $2x + 3y + 1 = 0$, zaś proste do niej prostopadłe mają równanie $-3x + 2y + C = 0$, gdzie C jest dowolną liczbą. Podstawiając do niego współrzędne środka odcinka AB , czyli punktu $S = (1; -1)$, otrzymujemy równość $3 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + C = 0$, a z niej $C = -5$.

Odpowiedź: Symetralna odcinka AB ma równanie: $3x - 2y - 5 = 0$.

Przykład 4*. Udowodnij, że jeżeli wierzchołki trójkąta leżą na hiperboli o równaniu $xy = 1$, to punkt przecięcia jego wysokości także leży na tej hiperboli.

Rozwiązanie:

Jeżeli wierzchołki trójkąta ABC leżą na hiperboli o równaniu $xy = 1$, to możemy przyjąć, że: $A = \left(a; \frac{1}{a}\right)$, $B = \left(b; \frac{1}{b}\right)$, $C = \left(c; \frac{1}{c}\right)$. Wówczas boki AB i BC mają odpowiednio

równania: $y - \frac{1}{a} = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a}(x - a)$ i $y - \frac{1}{b} = \frac{\frac{1}{c} - \frac{1}{b}}{c - b}(x - b)$, czyli odpowiednio równania:

$\frac{1}{ab}x + y - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 0$ i $\frac{1}{bc}x + y - \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 0$, zaś wysokości opuszczone na te boki z wierzchołków C i A mają odpowiednio równania:

$$x - \frac{1}{ab}y + \left(\frac{1}{abc} - c\right) = 0 \quad \text{i} \quad x - \frac{1}{bc}y + \left(\frac{1}{abc} - a\right) = 0.$$

Wyznaczając z obu tych równań y , otrzymujemy:

$$(*) \quad y = abx + \left(\frac{1}{c} - abc\right) \quad \text{i} \quad y = bcx + \left(\frac{1}{a} - abc\right).$$

Porównując prawe strony tych równań, otrzymujemy:

$$abx + \left(\frac{1}{c} - abc\right) = bcx + \left(\frac{1}{a} - abc\right),$$

$$(ab - bc)x = \frac{1}{a} - \frac{1}{c},$$

$$(a - c)bx = -\frac{a - c}{ac} \quad \text{i ostatecznie:}$$

$$x = -\frac{1}{abc}.$$

Podstawiając otrzymaną wartość x do jednego z równań (*), otrzymujemy:

$$y = ab \cdot \left(-\frac{1}{abc}\right) + \frac{1}{c} - abc = -abc.$$

Punktem przecięcia wysokości danego trójkąta jest zatem punkt $H = \left(-\frac{1}{abc}; -abc\right)$.

Ponieważ $-\frac{1}{abc} \cdot (-abc) = 1$, więc należy on do hiperboli o równaniu $xy = 1$.



Pytania i zadania

- Podaj warunek:
 - prostokątności;
 - równoległości prostych o równaniach $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.
- Objasnij, dlaczego proste prostopadłe do prostej l o równaniu $Ax + By + C = 0$ mają równania postaci $Bx - Ay + C' = 0$, a proste równoległe do prostej l – równania postaci $Ax + By + C' = 0$, gdzie C' jest dowolną liczbą.
- Wykaż, że proste o równaniach kierunkowych $y = m_1x + n_1$ i $y = m_2x + n_2$ są:
 - prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $m_1m_2 + 1 = 0$;
 - równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $m_1 = m_2$.
- Napisz równania kilku prostych prostopadłych i kilku prostych równoległych do prostej:
 - o równaniu $2x - 3y + 1 = 0$;
 - przechodzącej przez punkty $P = (-2; 2)$ i $Q = (2; -2)$.
- Punkty: $A = (-3; 2)$, $B = (4; -1)$, $C = (2; 5)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Napisz jego równania:
 - środkowych,
 - wysokości,
 - symetralnych boków,
 - dwusiecznych kątów.

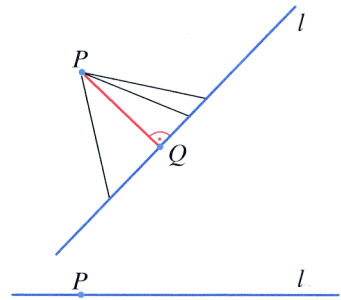
6. Udowodnij metodą współrzędnych, że w każdym trójkącie:
- środkowe,
 - symetralne boków,
 - wysokości,
 - dwusieczne kątów
- przecinają się w jednym punkcie.
7. Jeden z boków kwadratu $ABCD$ jest zawarty w prostej o równaniu $2x - y - 2 = 0$. Wierzchołek $A = (1; 5)$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków.

5. Odległość punktu od prostej

Odległością punktu od prostej nieprzechodzącej przez ten punkt nazywamy długość najkrótszego odcinka, którego jednym końcem jest dany punkt, a drugim – punkt leżący na tej prostej. Wiemy też, że tym najkrótszym odcinkiem jest odcinek prostopadły do tej prostej (ryc. 2.15).

Gdy punkt leży na prostej, to jego odległością od niej jest liczba 0.

Udowodnijmy teraz następujące twierdzenie:



Ryc. 2.15.

Twierdzenie 1.

Odległość d punktu $P = (x_0; y_0)$ od prostej l o równaniu $Ax + By + C = 0$ wyraża się wzorem:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Dowód. Gdy punkt P należy do prostej l , wtedy oczywiście wzór ten zachodzi, bowiem $d = 0$ oraz $Ax_0 + By_0 + C = 0$.

Niech zatem punkt P leży poza prostą l . Poprowadźmy przez punkt P prostą k prostopadłą do l , a punkt, w którym obie proste się przecinają, oznaczmy przez Q (ryc. 2.16).

Niech $Q = (x; y)$. Jeśli prosta l ma równanie:

(1) $Ax + By + C = 0$, w którym $A \neq 0$ i $B \neq 0$, to prostą k opisuje równanie:

$$(2) Bx - Ay + Ay_0 - Bx_0 = 0.$$

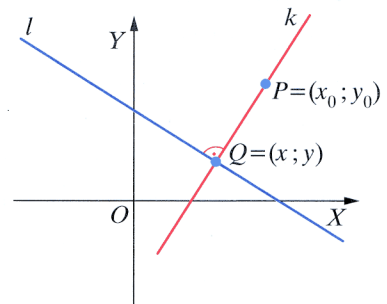
Równania (1) i (2) są równoważne odpowiednio równaniom:

$$(3) A(x - x_0) + B(y - y_0) = -(Ax_0 + By_0 + C),$$

$$(4) B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0.$$

Pomnożmy obie strony równania (3) przez A , zaś równania (4) przez B , a następnie dodajmy je stronami; otrzymamy równanie:

$$(*) (A^2 + B^2)(x - x_0) = -A(Ax_0 + By_0 + C).$$



Ryc. 2.16.

Gdy obie strony równania (3) pomnożymy przez B , a równania (4) pomnożymy przez $-A$, a następnie tak otrzymane równania dodamy stronami, wówczas uzyskamy równanie:

$$(**) (A^2 + B^2)(y - y_0) = -B(Ax_0 + By_0 + C).$$

Z równań (*) i (**) wyznaczamy odpowiednio:

$$x - x_0 = -\frac{A}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C) \quad \text{i} \quad y - y_0 = -\frac{B}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C).$$

Szukana odległość d równa jest długości odcinka PQ . Zatem:

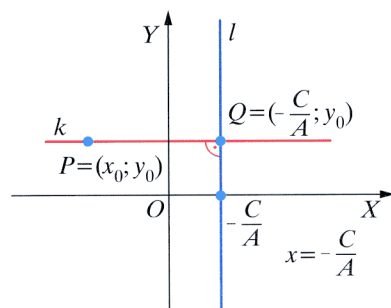
$$\begin{aligned} d = PQ &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \\ &= \sqrt{\left(-\frac{A}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C)\right)^2 + \left(-\frac{B}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C)\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{A^2}{(A^2 + B^2)^2}(Ax_0 + By_0 + C)^2 + \frac{B^2}{(A^2 + B^2)^2}(Ax_0 + By_0 + C)^2} = \\ &= \sqrt{(Ax_0 + By_0 + C)^2 \left(\frac{A^2 + B^2}{(A^2 + B^2)^2}\right)} = \sqrt{\frac{(Ax_0 + By_0 + C)^2}{A^2 + B^2}} = \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{aligned}$$

Jeśli prostą l opisuje równanie $Ax + By + C = 0$, w którym $B = 0$, wtedy oczywiście $A \neq 0$ i równanie to ma postać $Ax + C = 0$, czyli $x = -\frac{C}{A}$ (ryc. 2.17). W takim wypadku odległość punktu $P = (x_0; y_0)$ od prostej l wynosi:

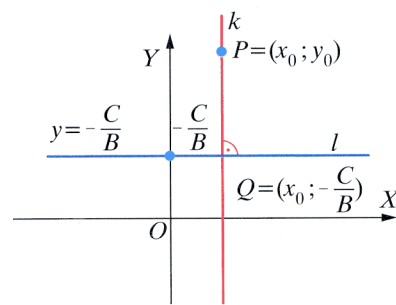
$$d = \left|x_0 + \frac{C}{A}\right| = \frac{|Ax_0 + C|}{|A|} = \frac{|Ax_0 + 0y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + 0^2}}.$$

Z kolei, gdy w równaniu $Ax + By + C = 0$ prostej l współczynnik $A = 0$, wtedy $B \neq 0$ i równanie prostej l ma postać $By + C = 0$, czyli $y = -\frac{C}{B}$ (ryc. 2.18), zaś odległość punktu $P = (x_0; y_0)$ od prostej l :

$$d = \left|y_0 + \frac{C}{B}\right| = \frac{|By_0 + C|}{|B|} = \frac{|0x_0 + By_0 + C|}{\sqrt{0^2 + B^2}}. \quad \square$$



Ryc. 2.17.



Ryc. 2.18.

Przykład 1. Znajdź odległość punktu $P = (2; -1)$ od prostej o równaniu $x + y - 1 = 0$.

Rozwiązanie:

Punkt ten leży na danej prostej, gdyż jego współrzędne spełniają równanie tej prostej. Zatem szukana odległość wynosi 0.

Przykład 2. Oblicz odległość punktu $P = (1; -2)$ od prostej o równaniu $4x - 3y - 15 = 0$.

Rozwiązanie:

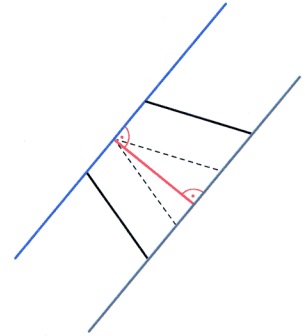
Mamy $x_0 = 1$, $y_0 = -2$, $A = 4$, $B = -3$, $C = -15$. Zatem ze wzoru na odległość punktu od prostej otrzymujemy:

$$d = \frac{|4 \cdot 1 + (-3) \cdot (-2) - 15|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|4 + 6 - 15|}{\sqrt{25}} = \frac{|-5|}{5} = 1.$$

Ze wzoru na odległość punktu od prostej można łatwo uzyskać wzór na odległość pary prostych równoległych.

Odległością pary prostych równoległych jest długość najkrótszego odcinka, którego jeden koniec leży na jednej prostej, a drugi – na drugiej. Najkrótszym jest odcinek prostopadły do obu prostych (ryc. 2.19).

Zachodzi twierdzenie:



Ryc. 2.19.

Twierdzenie 2.

Odległość d prostych równoległych k i l o równaniach odpowiednio $Ax + By + C_1 = 0$ i $Ax + By + C_2 = 0$ wyraża się wzorem:

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

□ Dowód. Niech $P = (x_0; y_0)$ będzie punktem prostej k . Zachodzi więc równość $Ax_0 + By_0 + C_1 = 0$, skąd $Ax_0 + By_0 = -C_1$. Wówczas odległość prostych k i l , to odległość punktu P od prostej l (mającej równanie $Ax + By + C_2 = 0$), czyli

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-C_1 + C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad \square$$

Przykład 3. Znajdź odległość prostych równoległych o równaniach $3x + 4y + 10 = 0$ i $3x + 4y - 5 = 0$.

Rozwiązanie:

$$A = 3, B = 4, C_1 = 10, C_2 = -5, \text{ więc szukana odległość } d = \frac{|10 - (-5)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3.$$

Przykład 4. Napisz równania prostych równoległych do prostej o równaniu $12x + 5y + 13 = 0$ i odległych od niej o 2.

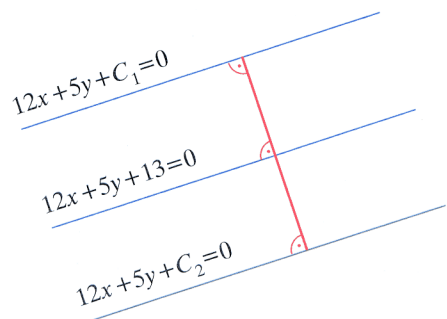
Rozwiązanie:

Nietrudno zauważyć, że istnieją dwie takie proste (ryc. 2.20). Każdą z nich opisuje równanie $12x + 5y + C = 0$. Ze wzoru na odległość pary prostych równoległych mamy: $2 = \frac{|C - 13|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{|C - 13|}{13}$,

czyli $|C - 13| = 26$. Stąd $C - 13 = -26$ lub $C - 13 = 26$ i ostatecznie $C = -13$ lub $C = 39$.

Odpowiedź: Szukane proste mają równania:

$$12x + 5y - 13 = 0 \text{ i } 12x + 5y + 39 = 0.$$



Ryc. 2.20.



Pytania i zadania

- Jaki jest wzór na odległość:
 - punktu od prostej,
 - pary prostych równoległych?
- Podaj wzór na odległość punktu $P = (x_0; y_0)$ od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$.
- Podaj wzór na odległość pary prostych równoległych o równaniach: $Ax + By + C_1 = 0$ i $Ax + By + C_2 = 0$.
- Oblicz odległość punktu P od prostej l , gdy:
 - $P = (2; 1)$, a prosta l ma równanie $4x - 3y + 1 = 0$;
 - $P = (3; -2)$, a prosta l ma równanie $-x + y - 5 = 0$;
 - $P = (2; -1)$, a prosta l ma równanie $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$.
- Oblicz wysokości trójkąta ABC , w którym: $A = (-3; 2)$, $B = (4; -1)$, $C = (2; 5)$.
- Znajdź odległość prostych o równaniach:
 - $6x + 8y - 2 = 0$ i $6x + 8y + 8 = 0$;
 - $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$ i $\sqrt{3}x - y - 10 = 0$.
- Znajdź równania prostych równoległych do prostej o równaniu $3x - 4y + 2 = 0$ i odległych od niej o 3.
- Wykaż metodą współrzędnych, że w trójkącie równoramiennym suma odległości dowolnego punktu podstawy od prostych zawierających ramiona jest stała.

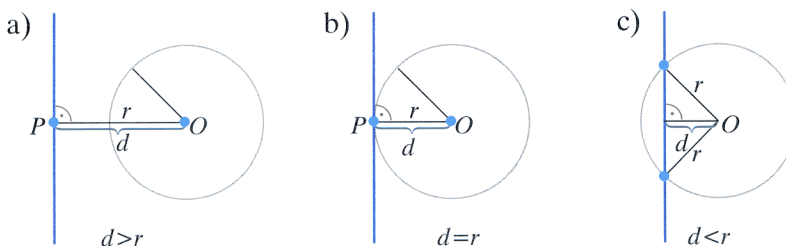
6. Prosta i okrąg na płaszczyźnie współrzędnych

Wzór na odległość punktu od prostej wykorzystamy teraz do badania wzajemnego położenia okręgu i prostej na płaszczyźnie. Odległość środka okręgu od prostej może być:

- większa od długości promienia okręgu,
- równa długości promienia okręgu,
- mniejsza od długości tego promienia.

Wówczas prosta i okrąg odpowiednio:

- nie mają punktu wspólnego (ryc. 2.21a);
- mają jeden punkt wspólny; prostą nazywamy wtedy **styczną** do okręgu (ryc. 2.21b);
- mają dwa punkty wspólne; mówimy, że wtedy prosta przecina okrąg lub jest jego **sieczną** (ryc. 2.21c).



Ryc. 2.21.

Zajmijmy się teraz okręgiem i prostą na płaszczyźnie współrzędnych, czyli okręgiem i prostą o danych równaniach.

Przykład 1. Określ wzajemne położenie prostej o równaniu $x - y + 1 = 0$ i okręgu o równaniu $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

Rozwiązanie:

Równanie $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ jest równoważne równaniu $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$, z czego wynika, że przedstawia okrąg o środku $S = (-1; 2)$ i promieniu $r = 3$. Obliczmy odległość punktu S od prostej o podanym równaniu. Zgodnie ze znanym wzorem mamy:

$$d = \frac{|1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}. \text{ Tak więc } d < r.$$

Okrąg i prosta dane w zadaniu mają dwa punkty wspólne. Aby je wyznaczyć, rozwiążemy układ równań:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9 \end{cases}$$

i otrzymujemy kolejno równoważne układy równań:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y^2 + (y - 2)^2 = 9, \end{cases} \quad \begin{cases} y = x + 1 \\ 2y^2 - 4y - 5 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - 1 \\ y = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{14} \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x = y - 1 \\ y = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{14} \end{cases}$$

oraz ostatecznie:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}\sqrt{14} \\ y = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{14} \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}\sqrt{14} \\ y = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{14}. \end{cases}$$

Zatem okrąg i prosta o danych równaniach mają dwa punkty wspólne:

$$P = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{14}; 1 - \frac{1}{2}\sqrt{14}\right) \text{ i } Q = \left(\frac{1}{2}\sqrt{14}; 1 + \frac{1}{2}\sqrt{14}\right).$$

Przykład 2. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A = (2; 1)$ i stycznego do obu osi układu współrzędnych.

Rozwiązanie:

Okrąg, którego równanie chcemy wyznaczyć, ma środek na dwusiecznej kąta XOY zawartej w prostej o równaniu $y = x$ i jest styczny do ramion tego kąta. Wobec tego w jego równaniu kanonicznym $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ możemy przyjąć, że $a = b = r$. Otrzymujemy równanie $(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$, które, po podstawieniu do niego współrzędnych punktu A , prowadzi do równania $(2 - r)^2 + (1 - r)^2 = r^2$, czyli równania $r^2 - 6r + 5 = 0$.

Rozwiązując je w znany sposób, otrzymujemy $r = 1$ lub $r = 5$.

Istnieją więc dwa okręgi spełniające warunki zadania; mają one równania:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \text{ i } (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25 \text{ (wykonaj odpowiednią rycinę).}$$

Przykład 3. Zbadaj położenie prostej o równaniu $4x + 3y - 10 = 0$ względem okręgu o równaniu $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 15 = 0$.

Rozwiązanie:

Przekształcając równanie danego okręgu w postać kanoniczną, otrzymamy równanie $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 25$, z którego odczytujemy środek okręgu $S = (-3; -1)$ i promień $r = 5$. Odległość środka S od danej prostej znajdziemy ze wzoru:

$$d = \frac{|4 \cdot (-3) + 3 \cdot (-1) - 10|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{25}{5} = 5.$$

Tak więc $d = r$, co oznacza, że dana prosta jest styczna do danego okręgu.

Wiemy zaś, że styczna do okręgu jest prostopadła do jego promienia, poprowadzonego do punktu styczności. Zatem prosta zawierająca ten promień przechodzi przez punkt styczności. Jej równanie ma postać $3x - 4y + C = 0$. Podstawiając do tego równania współrzędne środka danego okręgu, znajdujemy $C = 5$ i otrzymujemy równanie $3x - 4y = -5$. Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ 3x - 4y = -5, \end{cases}$$

otrzymujemy współrzędne punktu styczności. Jest nim punkt $P = (1; 2)$.

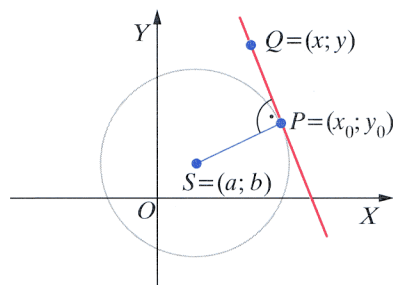
Wyznamy teraz równanie stycznej do okręgu o równaniu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ poprowadzonej w danym jego punkcie $P = (x_0; y_0)$. W tym celu znowu skorzystamy z tego, że styczna do okręgu jest prostopadła do jego promienia, poprowadzonego do punktu styczności. Stąd bowiem wynika z kolei, że wektor $\vec{SP} = [x_0 - a; y_0 - b]$ jest prostopadły do tej stycznej, a więc do wektora $\vec{PQ} = [x - x_0; y - y_0]$, gdzie $Q = (x; y)$ jest dowolnym punktem tej stycznej (ryc. 2.22). Z warunku prostopadłości wektorów otrzymujemy równanie:

$$(*) (x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Ale } (x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) &= (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) - \\ &- \left((x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 \right) = (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) - r^2. \end{aligned}$$

Zatem równanie (*) jest równoważne równaniu

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2.$$



Ryc. 2.22.

Tym samym udowodniliśmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Styczna do okręgu o równaniu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ poprowadzona w punkcie $P = (x_0; y_0)$ tego okręgu ma równanie:

$$(*) (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2.$$

W przypadku, gdy środek okręgu znajduje się w początku układu współrzędnych, czyli gdy $a = b = 0$, równanie $(*)$ przybiera postać $x_0 x + y_0 y = r^2$.

Przykład 4. Napisz równanie stycznej do okręgu o równaniu $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ poprowadzonej w punkcie $P = (4; -2)$ tego okręgu.

Rozwiązanie:

Mamy dane: $a = 1, b = 2, r = 5, x_0 = 4, y_0 = -2$. Podstawiając te wartości do równania stycznej, otrzymamy $(4-1)(x-1) + (-2-2)(y-2) = 25$ i po uproszczeniu $3x - 4y - 20 = 0$.
Odpowiedź: Szukana styczna ma równanie $3x - 4y - 20 = 0$.

Przykład 5*. Napisz równanie stycznej do okręgu o równaniu $(x-8)^2 + (y-1)^2 = 25$ poprowadzonej z punktu $P = (1; 2)$ poza tym okręgiem.

Rozwiązanie:

Można poprowadzić dwie takie styczne.

Sposób pierwszy. Niech $Q = (x_1; y_1)$ oznacza niewiadomy punkt styczności danego okręgu i poprowadzonej stycznej. Możemy więc napisać równanie stycznej w tym punkcie: $(x_1 - 8)(x - 8) + (y_1 - 1)(y - 1) = 25$. Ponieważ do tej stycznej ma należeć punkt $P = (1; 2)$, zachodzi więc także równość $(x_1 - 8)(1 - 8) + (y_1 - 1)(2 - 1) = 25$, z której kolejno mamy:

$$-7(x_1 - 8) + (y_1 - 1) = 25,$$

$$-7x_1 + 56 + y_1 - 1 = 25 \text{ i ostatecznie } 7x_1 - y_1 - 30 = 0. \text{ Ponadto zachodzi równość}$$

$(x_1 - 8)^2 + (y_1 - 1)^2 = 25$. Po rozwiązaniu układu równań:

$$\begin{cases} 7x_1 - y_1 - 30 = 0 \\ (x_1 - 8)^2 + (y_1 - 1)^2 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x_1 - y_1 - 30 = 0 \\ (x_1 - 8)^2 + (y_1 - 1)^2 = 25 \end{cases}$$

otrzymujemy: $x_1 = 5$ i $y_1 = 5$ lub $x_1 = 4$ i $y_1 = -2$. Mamy więc dwa punkty styczności: $Q_1 = (5; 5)$ i $Q_2 = (4; -2)$.

Podstawiając do równania $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ w miejsce x_1, x_2, y_1, y_2 odpowiednie współrzędne par punktów P i Q_1 oraz P i Q_2 , znajdujemy szukane równania stycznych; są to równania: $3x - 4y + 5 = 0$ i $4x + 3y - 10 = 0$.

Sposób drugi. Przez punkt $P = (1; 2)$ prowadzimy dowolną prostą; ma ona równanie: $y - 2 = m(x - 1)$, czyli równanie: $(*) mx - y + 2 - m = 0$. Ze wzoru na odległość punktu

od prostej obliczamy odległość środka $S = (8; 1)$ danego okręgu od prostej o równaniu (*)

$$\text{i otrzymujemy: } d = \frac{|8 \cdot m - 1 + 2 - m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{|7m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

Z warunku styczności okręgu i prostej wynika równanie $\frac{|7m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 5$, którego rozwią-

zaniem są liczby: $m_1 = \frac{3}{4}$ i $m_2 = -\frac{4}{3}$. Po podstawieniu ich do równania (*) uzyskujemy równania $3x - 4y + 5 = 0$ i $4x + 3y - 10 = 0$.

Sposób trzeci. Zauważmy, że prosta o równaniu $x = 1$ nie przecina danego okręgu, więc szukana styczna nie jest prostopadła do osi OX . Wobec tego ma ona równanie postaci $y - 2 = m(x - 1)$. Ponieważ prosta ta ma mieć z okręgiem dokładnie jeden punkt wspólny, więc wyróżnik równania $(x - 8)^2 + (m(x - 1) + 1)^2 - 25 = 0$, czyli równania $(m^2 + 1)(x - 1)^2 + 2(m - 7)(x - 1) + 25 = 0$, musi być równy 0. Stąd otrzymujemy: $m = -\frac{4}{3}$ lub $m = \frac{3}{4}$ i szukane równania: $4x + 3y - 10 = 0$ i $3x - 4y + 5 = 0$.



Pytania i zadania

- Podaj równanie stycznej do okręgu o równaniu:
 - $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ w jego punkcie $P = (x_0; y_0)$;
 - $x^2 + y^2 = r^2$ w jego punkcie $P = (x_0; y_0)$.
- Zbadaj wzajemne położenie prostej i okręgu o podanych równaniach:
 - $3x - y - 1 = 0$ i $x^2 + y^2 = 9$;
 - $3x - 4y + 10 = 0$ i $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$;
 - $x - y + 9 = 0$ i $x^2 + y^2 - 6x = 0$;
 - $\sqrt{3}x + y - 1 = 0$ i $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$.
- Oblicz długość cięciwy, jaką w okręgu o równaniu $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 36$ wyznacza prosta o równaniu $2x - y + 2 = 0$.
- Napisz równanie stycznej do okręgu o równaniu $(x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 25$ poprowadzonej przez punkt $P = (5; 3)$.
- Napisz równanie stycznej do okręgu o równaniu $(x - 8)^2 + (y - 1)^2 = 25$ poprowadzonej przez punkt $P = (1; 2)$.
- Oblicz długość cięciwy łączącej punkty styczności stycznych do okręgu o równaniu $(x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 20$ wyprowadzonych z początku układu współrzędnych.
- Z początku układu współrzędnych wyprowadzono styczne do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 14x + 2y + 25 = 0$. Oblicz pole trójkąta ograniczonego tymi stycznymi i cięciwą łączącą punkty styczności.

8. Oblicz pole trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych i styczną w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC , w którym: $A = (4; 2)$, $B = (11; 3)$, $C = (3; 9)$.
9. Prosta o równaniu $x - 7y + 5 = 0$ przecina okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 15 = 0$ w punktach A i B , w których poprowadzono styczne przecinające się w punkcie C . Oblicz pole trójkąta ABC .
- 10**. Dany jest okrąg, którego środek ma współrzędne będące liczbami niewymiernymi. Udowodnij, że nie można w ten okrąg wpisać trójkąta, którego wszystkie wierzchołki mają obie współrzędne będące liczbami wymiernymi.

7. Nierówność opisująca półpłaszczyznę

Rozważmy na płaszczyźnie współrzędnych prostą l o równaniu $Ax + By + C = 0$. Jeśli punkt $P = (x; y)$ leży na prostej l , to jego współrzędne spełniają to równanie. Jeśli zaś nie leży on na tej prostej, jego współrzędne nie spełniają tego równania i zachodzi wówczas jedna z nierówności: $Ax + By + C > 0$ lub $Ax + By + C < 0$.

Prosta l dzieli płaszczyznę na dwie półpłaszczyzny. Jeśli więc punkt P nie leży na prostej l , to musi leżeć po którejś z jej stron. Zatem każdy punkt któregoś z tych półpłaszczyzn nieleżący na prostej l ma współrzędne spełniające jedną z podanych wyżej nierówności.

Na odwrót, każda z tych nierówności opisuje jedną z półpłaszczyzn bez prostej l , na jakie dzieli prosta l płaszczyznę XOY , przy czym, jeśli pierwsza z tych nierówności przedstawia jedną półpłaszczyznę, to druga nierówność opisuje drugą półpłaszczyznę.

Istotnie, niech punkty $P = (x_1; y_1)$ i $Q = (x_2; y_2)$ należą do różnych półpłaszczyzn o wspólnej krawędzi l (ryc. 2.23). Wówczas odcinek PQ przecina prostą l w jakimś punkcie $S = (x; y)$. Punkt S dzieli odcinek PQ w pewnym stosunku dodatnim k , ma więc współrzędne określone wzorami:

$$(1) \quad x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \quad y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}$$

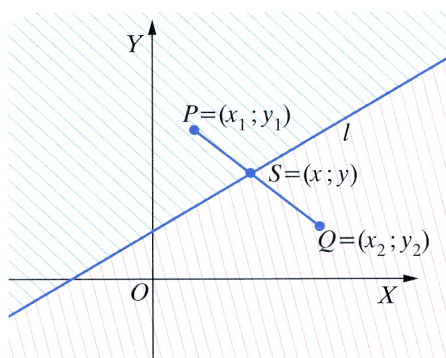
(zob. podręcznik *Matematyka 2*, podrozdz. 6.3. „Stosunek podziału wektora”).

Liczyby x i y spełniają równanie prostej l , więc:

$$(2) \quad A \cdot \frac{x_1 + kx_2}{1 + k} + B \cdot \frac{y_1 + ky_2}{1 + k} + C = 0. \quad \text{Stąd:}$$

$$(3) \quad k = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C}.$$

Ponieważ $k > 0$, więc liczby $Ax_1 + By_1 + C$ i $Ax_2 + By_2 + C$ mają przeciwne znaki, co oznacza, że jeżeli współrzędne punktu P spełniają jedną z nierówności $Ax + By + C > 0$ lub $Ax + By + C < 0$, to współrzędne punktu Q spełniają drugą.



Ryc. 2.23.

Na odwrót, jeśli liczby $Ax_1 + By_1 + C$ i $Ax_2 + Bx_2 + C$ mają przeciwne znaki, to liczba k określona wzorem (3) jest dodatnia i spełnia równanie (2), a punkt $S = \left(\frac{x_1 + kx_2}{1+k}, \frac{y_1 + ky_2}{1+k} \right)$ leży wewnątrz odcinka PQ i, na mocy równości (2), leży także na prostej l . Wobec tego punkty P i Q należą do różnych półpłaszczyzn o wspólnej krawędzi l .

Punkty P i Q należą zatem do:

- jednej z półpłaszczyzn o wspólnej krawędzi l wtedy i tylko wtedy, gdy współrzędne tych punktów spełniają tylko jedną z nierówności $Ax + By + C > 0$ i $Ax + By + C < 0$;
- różnych półpłaszczyzn o wspólnej krawędzi l wtedy i tylko wtedy, gdy współrzędne jednego z tych punktów spełniają jedną z nierówności: $Ax + By + C > 0$ i $Ax + By + C < 0$, a drugiego – drugą z nich.

Tym samym udowodniliśmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Każda z nierówności liniowych postaci $Ax + By + C > 0$ lub $Ax + By + C < 0$ opisuje jedną z półpłaszczyzn, na jakie dzieli płaszczyznę XOY prosta o równaniu $Ax + By + C = 0$.

Aby stwierdzić, którą z półpłaszczyzn opisuje dana nierówność liniowa, wystarczy sprawdzić, na której z nich leży punkt o współrzędnych spełniających tę nierówność.

Przykład 1. Rozstrzygnij, czy punkty: $P = (-1; 2)$ i $Q = (2; -3)$ leżą na płaszczyźnie współrzędnych po różnych stronach, czy też po jednej stronie prostej o równaniu $2x - y - 3 = 0$.

Rozwiązanie:

Po podstawieniu współrzędnych danych punktów do wyrażenia $2x - y - 3$ otrzymujemy:

$$2 \cdot (-1) - 2 - 3 < 0, 2 \cdot 2 - (-3) - 3 > 0.$$

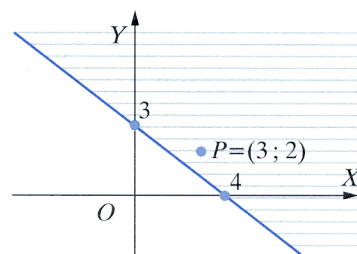
Widzimy więc, że współrzędne punktu P spełniają nierówność $2x - y - 3 < 0$, a współrzędne punktu Q – nierówność $2x - y - 3 > 0$. Zatem punkty te leżą na płaszczyźnie współrzędnych po różnych stronach danej prostej.

Przykład 2. Zaznacz na płaszczyźnie współrzędnych zbiór punktów o współrzędnych spełniających nierówność $3x + 4y - 12 > 0$.

Rozwiązanie:

Narysujmy najpierw prostą o równaniu $3x + 4y - 12 = 0$. Następnie wybierzmy punkt należący do jednej z półpłaszczyzn ograniczonych tą prostą, na przykład punkt $P = (3; 2)$, i sprawdźmy, czy jego współrzędne spełniają podaną nierówność.

Stwierdzamy, że rzeczywiście spełniają ją, gdyż $3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 - 12 > 0$. Zatem poszukiwanym zbiorem punktów jest półpłaszczyzna ograniczona prostą o podanym równaniu (bez niej), do której należy punkt P (na ryc. 2.24 jest ona zakreskowana na zielono).



Ryc. 2.24.

Przykład 3. Zaznacz na płaszczyźnie współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne spełniają układ nierówności:

$$\begin{cases} -3x - y + 1 < 0 \\ 2x - y + 1 \geq 0. \end{cases}$$

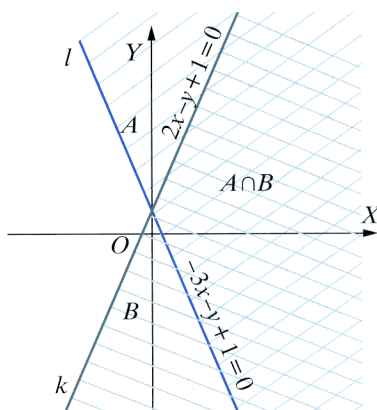
Rozwiązanie:

Rysujemy najpierw proste o równaniach $-3x - y + 1 = 0$ i $2x - y + 1 = 0$. Wprowadźmy następujące oznaczenie:

$$A = \{(x; y) : -3x - y + 1 < 0\}, B = \{(x; y) : 2x - y + 1 \geq 0\}.$$

Zbiór A jest półpłaszczyzną o krawędzi l bez niej (obszar zakreskowany na ryc. 2.25 na niebiesko), B zaś jest półpłaszczyzną o krawędzi k z nią, gdyż nierówność opisująca ten zbiór jest nieostra (obszar zakreskowany na zielono).

Poszukiwanym zbiorem jest część wspólna zbiorów A i B , czyli zbiór $A \cap B$ (obszar pokratkowany).



Ryc. 2.25.

Pytania i zadania

- Jaki zbiór punktów na płaszczyźnie współrzędnych jest opisany przez nierówność:
 - $Ax + By + C > 0$;
 - $Ax + By + C \leq 0$?
- Określ położenie punktów P i Q względem prostej l , gdy:
 - $P = (1; 3)$, $Q = (-2; 3)$, a prosta l ma równanie $-2x + 3y - 3 = 0$;
 - $P = (-2; 1)$, $Q = (2; -2)$, a prosta l ma równanie $2x - y - 1 = 0$.
- Zaznacz na płaszczyźnie współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne spełniają nierówność:
 - $x - 2y + 1 > 0$;
 - $3x - y + 2 \leq 0$;
 - $x - 2 \geq 0$;
 - $y + 1 \leq 0$.
- Zaznacz na płaszczyźnie współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne spełniają układ nierówności:
 - $$\begin{cases} 2x - y + 2 \geq 0 \\ -x + 2y - 2 \leq 0; \end{cases}$$
 - $$\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ 3x - y - 1 > 0; \end{cases}$$
 - $$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ 2x - y - 1 \geq 0 \\ x + 2y - 2 \leq 0. \end{cases}$$

5. Dla jakich wartości m współrzędne wszystkich punktów trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (0; 0)$, $B = (0; -4)$, $C = (-2; 0)$ spełniają nierówność $x - y + m \geq 0$?
6. Dla jakich wartości parametru m odcinek AB , gdzie $A = (0; 9)$, $B = (3; 6)$ leży na półpłaszczyźnie opisanej nierównością $2x + y \geq m$?
7. Dla jakich wartości parametru m proste o równaniach: $x - my - 1 = 0$ i $mx - y - 1 = 0$ przecinają się w punkcie należącym do kwadratu $ABCD$, którego wierzchołki: $A = (1; 1)$, $B = (-1; 1)$, $C = (-1; -1)$, $D = (1; -1)$?
- 8*. Zilustruj na płaszczyźnie XOY nierówności:
 - a) $|x - y| + |x + y| \leq 2$;
 - b) $|x| - |y - 1| \geq 1$;
 - c) $2 \leq ||x| - |y|| \leq 3$.

III. Funkcje trygonometryczne

Funkcje trygonometryczne poznaliście już w klasie pierwszej. Uzyskana wówczas wiedzę będziecie mogli teraz poszerzyć o kolejne twierdzenia, mające duże znaczenie dla całej trygonometrii. Następnie nauczycie się je stosować do przekształcania wyrażeń, dowodzenia tożsamości oraz rozwiązywania równań i nierówności trygonometrycznych.

1. Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy argumentów

Obierzmy na płaszczyźnie XOY dwa różne punkty $A = (x_A; y_A)$ i $B = (x_B; y_B)$, takie, że: $OA = OB = 1$. Oznaczmy: $\sphericalangle XOA = \alpha$, $\sphericalangle XOB = \beta$ (ryc. 3.1). Wówczas z definicji sinus i cosinus dowolnego kąta: $x_A = \cos \alpha$, $y_A = \sin \alpha$, $x_B = \cos \beta$, $y_B = \sin \beta$.

Obliczmy teraz kwadrat długości odcinka AB według ogólnego wzoru na odległość dwóch punktów na płaszczyźnie:

$$\begin{aligned} (*) \quad AB^2 &= (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = \\ &= (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = 2(1 - \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta). \end{aligned}$$

Gdy obrócimy w kierunku dodatnim osie współrzędnych o kąt β , otrzymamy układ $X'OY'$, którego oś OX' zawierać będzie odcinek OB . Oznacza to, że $\sphericalangle X'OB = 0$, zaś $\sphericalangle X'OA = \alpha - \beta$ (ryc. 3.1). W układzie $X'OY'$ punkty A i B mają więc współrzędne:

$$x'_A = \cos(\alpha - \beta), \quad y'_A = \sin(\alpha - \beta), \quad x'_B = 1, \quad y'_B = 0.$$

Obliczmy teraz kwadrat długości odcinka AB , korzystając ze współrzędnych punktów A i B w układzie $X'OY'$:

$$\begin{aligned} (**) \quad AB^2 &= (x'_A - x'_B)^2 + (y'_A - y'_B)^2 = [\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + [\sin(\alpha - \beta)]^2 = \\ &= 2[1 - \cos(\alpha - \beta)]. \end{aligned}$$

Jeśli porównamy wyrażenia (*) i (**), otrzymamy równość:

$$2(1 - \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta) = 2[1 - \cos(\alpha - \beta)],$$

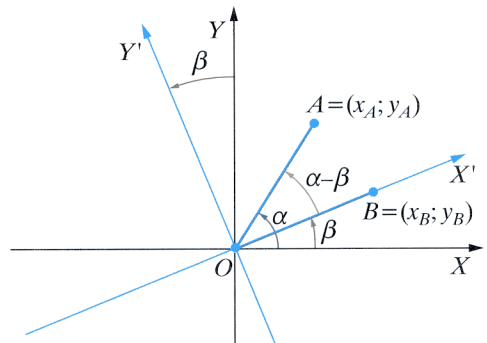
a stąd – równość:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

Zastępując β przez $-\beta$, otrzymamy:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos[\alpha - (-\beta)] = \\ &= \cos \alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin \alpha \cdot \sin(-\beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

(na mocy parzystości funkcji cosinus i nieparzystości funkcji sinus).



Ryc. 3.1.

Tak więc:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

Po podstawieniu w tej równości $\alpha + 90^\circ$ w miejsce α mamy kolejną równość:

$$\cos[(\alpha + 90^\circ) + \beta] = \cos(\alpha + 90^\circ) \cos \beta - \sin(\alpha + 90^\circ) \sin \beta, \text{ czyli równość}$$

$$\cos[90^\circ + (\alpha + \beta)] = \cos(90^\circ + \alpha) \cos \beta - \sin(90^\circ + \alpha) \sin \beta,$$

która po zastosowaniu odpowiednich wzorów redukcyjnych prowadzi do równości:

$$-\sin(\alpha + \beta) = -\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta,$$

$$-\sin(\alpha + \beta) = -(\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) \text{ i ostatecznie do wzoru:}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha.$$

Po zastąpieniu w tym wzorze argumentu β przez $-\beta$ otrzymujemy równość:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin(-\beta) \cos \alpha, \text{ a z niej – kolejny wzór:}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha.$$

Tym samym udowodniliśmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.

Dla dowolnych kątów α i β zachodzą wzory:

$$(1) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha,$$

$$(2) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha,$$

$$(3) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta,$$

$$(4) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

Założmy, że α i β są takimi kątami, że $\cos(\alpha + \beta) \neq 0$. Wówczas ze wzorów (1) i (3) wynika, że $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}$.

Gdy ponadto $\cos \alpha \neq 0$ i $\cos \beta \neq 0$, wtedy dzieląc licznik i mianownik ostatniego ułamka przez $\cos \alpha \cdot \cos \beta$, otrzymamy:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \frac{\sin \beta \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

Zachodzi więc kolejne twierdzenie:

Twierdzenie 2.

Dla dowolnych kątów α i β takich, że $\cos \alpha \neq 0$, $\cos \beta \neq 0$ i $\cos(\alpha + \beta) \neq 0$, prawdziwa jest równość:

$$(5) \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

Zastępując w tym wzorze β przez $-\beta$ i korzystając z nieparzystości funkcji tangens, otrzymujemy wzór na $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}[\alpha + (-\beta)] = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(-\beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Prawdziwe jest zatem twierdzenie:

Twierdzenie 3.

Jeżeli α i β są takimi kątami, że $\cos \alpha \neq 0$, $\cos \beta \neq 0$ i $\cos(\alpha - \beta) \neq 0$, to:

$$(6) \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Nietrudno udowodnić też kolejne dwa twierdzenia:

Twierdzenie 4.

Dla dowolnych kątów α i β takich, że $\sin \alpha \neq 0$, $\sin \beta \neq 0$ i $\sin(\alpha + \beta) \neq 0$, zachodzi wzór:

$$(7) \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}.$$

Twierdzenie 5.

Dla dowolnych kątów α i β takich, że $\sin \alpha \neq 0$, $\sin \beta \neq 0$ i $\sin(\alpha - \beta) \neq 0$, prawdziwa jest równość:

$$(8) \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Dowody tych twierdzeń możecie przeprowadzić samodzielnie.

Przedstawione dowody twierdzeń o funkcjach trygonometrycznych sumy i różnicy argumentów mają charakter ogólny. Opierają się bowiem na definicjach funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta, wzorze na odległość dwóch punktów na płaszczyźnie oraz regułach dodawania kątów.

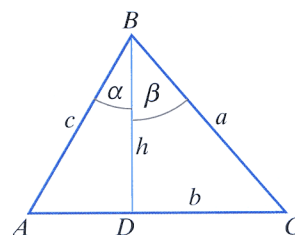
Niektóre z otrzymanych wzorów można dla pewnych wartości kątów zinterpretować geometrycznie. Poniżej przedstawimy dwie z takich interpretacji.

1. Z zastosowaniem wzoru na pole trójkąta.

Założmy, że α i β są dowolnymi kątami ostrymi i rozważmy trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle ABC = \alpha + \beta$, przy czym niech α i β będą kątami, jakie tworzą z wysokością $BD = h$ tego trójkąta odpowiednio jego boki AB i BC (ryc. 3.2).

Ze wzoru na pole S trójkąta ABC mamy:

$$(*) S = \frac{1}{2} ac \sin(\alpha + \beta).$$



Ryc. 3.2.

Jest ono równe sumie pól trójkątów ABD i DBC , więc $S = \frac{1}{2} AD \cdot h + \frac{1}{2} DC \cdot h$. Ponieważ jednocześnie: $h = a \cos \beta = c \cos \alpha$, $AD = c \sin \alpha$, $CD = a \sin \beta$, przeto:

$$(**) S = \frac{1}{2} ac \sin \alpha \cos \beta + \frac{1}{2} ac \sin \beta \cos \alpha.$$

Z równości (*) i (**) wynika, że $\frac{1}{2} ac \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} ac (\sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha)$, a stąd – wzór:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha.$$

2. Z zastosowaniem twierdzenia Ptolemeusza.

Przypomnijmy je:

! Iloczyn długości przekątnych czworokąta wpisanego w okrąg jest równy sumie iloczynów długości przeciwległych boków.

Niech $ABCD$ będzie czworokątem wpisanym w okrąg o promieniu R , którego średnicą jest przekątna AC tego czworokąta, tworząca z bokami AB i AD kąty ostre odpowiednio α i β . Załóżmy ponadto, że $AC = 2R$ (ryc. 3.3).

Według twierdzenia Ptolemeusza:

$$(*) AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

W trójkątach prostokątnych ABC i ACD zachodzą związki: $AB = 2R \cos \alpha$, $CD = 2R \sin \beta$, $AD = 2R \cos \beta$, $BC = 2R \sin \alpha$, w trójkącie ABD zaś, na mocy twierdzenia sinusów, prawdziwa jest równość $BD = 2R \sin(\alpha + \beta)$. Podstawiając otrzymane z tych związków wartości do równości (*), dostajemy równość:

$$2R \cdot 2R \sin(\alpha + \beta) = 2R \cos \alpha \cdot 2R \sin \beta + 2R \sin \alpha \cdot 2R \cos \beta,$$

z której wynika znany nam już wzór:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha.$$

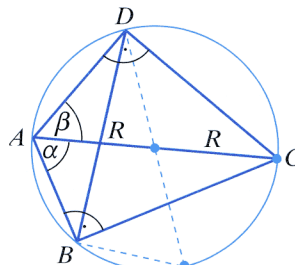
Powróćmy raz jeszcze do twierdzeń o funkcjach sumy dwóch argumentów, czyli do wzorów: (1), (3), (5) i (7). Gdy podstawimy w nich $\beta = \alpha$, otrzymamy związki funkcji trygonometrycznych argumentu podwojonego 2α z funkcjami argumentu α . Wyrażają je następujące twierdzenia:

Twierdzenie 6.

Dla każdego kąta α :

$$(9) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

$$(10) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$



Ryc. 3.3.

Twierdzenie 7.

Dla każdego kąta α takiego, że $\cos \alpha \neq 0$ i $\cos 2\alpha \neq 0$, zachodzi wzór:

$$(11) \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Twierdzenie 8.

Dla każdego kąta α takiego, że $\sin \alpha \neq 0$ i $\sin 2\alpha \neq 0$, prawdziwy jest wzór:

$$(12) \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Pytania i zadania

- Podaj wzór na:
 - $\sin(\alpha + \beta)$;
 - $\sin(\alpha - \beta)$.
- Wyprowadź wzór na:
 - $\sin 2\alpha$;
 - $\sin 3\alpha$.
- Wykaż, że $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$.
- Podaj wzór na:
 - $\cos(\alpha + \beta)$;
 - $\cos(\alpha - \beta)$.
- Wyprowadź wzór na:
 - $\cos 2\alpha$;
 - $\cos 3\alpha$.
- Udowodnij, że $\cos 2\alpha$ można wyrazić także wzorami:
 $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ i $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$.
- Wykaż, że:
 - $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$;
 - $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$;
 - $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.
- Podaj wzór na:
 - $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$;
 - $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.

Przy jakich założeniach dotyczących kątów α i β każdy z tych wzorów jest prawdziwy?
- Wyprowadź wzór na:
 - $\operatorname{tg} 2\alpha$;
 - $\operatorname{tg} 3\alpha$.

Przy jakich założeniach każdy z tych wzorów ma sens?
- Udowodnij, że:
 - $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$, gdy $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$ i $\cos \alpha \neq 0$;
 - $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$, gdy $\sin \alpha \neq 0$.
- Podaj wzór na:
 - $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$;
 - $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$

oraz założenia, przy których każdy z tych wzorów ma sens.



2. Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych

Z twierdzeń o funkcjach sumy argumentów można również wyprowadzić wiele innych wzorów. Sformułujemy je, jak poprzednio, w postaci kilku twierdzeń.

Niech α i β będą dowolnymi kątami. Łatwo sprawdzić, że zachodzą równości:

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \text{ oraz } \beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Zatem korzystając ze wzorów na funkcje sumy i różnicy kątów, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= \left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) + \\ &+ \left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta &= \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= \left(\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \\ &+ \left(\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \end{aligned}$$

Tym samym wykazaliśmy:

Twierdzenie 1.

Dla dowolnych kątów α i β zachodzą wzory:

$$(1) \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$(2) \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Podobnie rozumując, możemy udowodnić kolejne twierdzenie:

Twierdzenie 2.

Dla dowolnych kątów α i β prawdziwe są równości:

$$(3) \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$(4) \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Niech α i β będą takimi kątami, że $\cos \alpha \neq 0$ i $\cos \beta \neq 0$. Wówczas:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \text{ oraz}$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

Prawdziwe jest zatem twierdzenie:

Twierdzenie 3.

Jeżeli α i β są takimi kątami, że $\cos \alpha \neq 0$ i $\cos \beta \neq 0$, to zachodzą wzory:

$$(5) \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta},$$

$$(6) \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

Przykład 1. Oblicz $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru (1), otrzymujemy:

$$\sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 2 \sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cdot \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Przykład 2. Sprowadź wyrażenie $\sin \alpha + \cos \alpha$ do postaci iloczynowej.

Rozwiązanie:

Ponieważ $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$, więc:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \cos \alpha &= \sin \alpha + \sin(90^\circ - \alpha) = 2 \sin \frac{\alpha + 90^\circ - \alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - (90^\circ - \alpha)}{2} = \\ &= 2 \sin 45^\circ \cdot \cos(\alpha - 45^\circ) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(\alpha - 45^\circ) = \sqrt{2} \cos(\alpha - 45^\circ). \end{aligned}$$

Przykład 3. Oblicz wartość wyrażenia $\cos 20^\circ - \cos 80^\circ + \cos 140^\circ$.

Rozwiązanie:

Stosując wzór na sumę cosinusów, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \cos 20^\circ - \cos 80^\circ + \cos 140^\circ &= (\cos 140^\circ + \cos 20^\circ) - \cos 80^\circ = \\ &= 2 \cos \frac{140^\circ + 20^\circ}{2} \cdot \cos \frac{140^\circ - 20^\circ}{2} - \cos 80^\circ = 2 \cos 80^\circ \cdot \cos 60^\circ - \cos 80^\circ = \\ &= 2 \cos 80^\circ \cdot \frac{1}{2} - \cos 80^\circ = \cos 80^\circ - \cos 80^\circ = 0. \end{aligned}$$

Pytania i zadania

1. Podaj wzory na:

a) $\sin \alpha + \sin \beta$;

b) $\cos \alpha + \cos \beta$;

c) $\sin \alpha - \sin \beta$;

d) $\cos \alpha - \cos \beta$;

e) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta$;

f) $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta$.

2. Wyprowadź wzory na:

a) $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta$;

b) $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta$.

3. Udowodnij, że dla każdego kąta α :

- a) $\sin(\alpha + 60^\circ) + \sin(\alpha - 60^\circ) = \sin \alpha$; b) $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha - 45^\circ)$;
 c) $\sin 20^\circ - \sin 80^\circ + \sin 140^\circ = 0$; d) $\cos \alpha + \cos(120^\circ + \alpha) + \cos(240^\circ + \alpha) = 0$;
 e) $\sin \alpha + \sin(120^\circ + \alpha) + \sin(240^\circ + \alpha) = 0$.

4. Wykaż, że dla dowolnych kątów α i β zachodzą związki:

- a) $2 \sin \alpha \cdot \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$;
 b) $2 \cos \alpha \cdot \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$;
 c) $2 \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$.

5. Sprowadź do postaci iloczynowej wyrażenia:

- a) $1 + \sin \alpha$; b) $1 + \cos \alpha$; c) $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$; d) $\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta$;
 e) $1 - \operatorname{tg}^2 \alpha$; f) $1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha$; g) $1 + \sin 2\alpha$.

6. Sprowadź do postaci iloczynowej wyrażenia:

- a) $1 - \sin \alpha + \cos \alpha$; b) $1 + \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}$; c) $1 + \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\sin \alpha}$;
 d) $\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha$; e) $\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$.

7*. Oblicz wartość wyrażenia, nie używając tablic:

- a) $\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ - \cos 7^\circ$; b) $\sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12}$;
 c) $\cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{3\pi}{5}$; d) $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5}$;
 e) $\cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ$; f) $16 \cdot \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ$.

8**. Długości a, b, c boków trójkąta i miary przeciwległych im kątów odpowiednio α, β, γ spełniają warunki $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)c^2$, $\sin \alpha \sin \beta = \frac{3}{4}$. Udowodnij, że trójkąt ten jest równoboczny.

3. Przekształcanie wyrażeń trygonometrycznych

Przyjrzyjmy się teraz różnym przykładom zadań na przekształcanie wyrażeń trygonometrycznych, sprowadzanie ich do najprostszej postaci i obliczanie ich wartości.

Przykład 1. Oblicz $\sin x$, wiedząc, że $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin 2 \cdot \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{1} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{\left(2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}\right) : \cos^2 \frac{x}{2}}{\left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\right) : \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1}. \end{aligned}$$

(Dzielenie licznika i mianownika przez $\cos^2 \frac{x}{2}$ było możliwe dzięki założeniu, że $\cos \frac{x}{2} \neq 0$).

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{4}{5}.$$

Przykład 2. Oblicz $\operatorname{ctg} \alpha$, jeżeli wiesz, że $\operatorname{ctg}(\alpha - 45^\circ) = 2$.

Rozwiązanie:

$$\text{Ze wzoru na } \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) \text{ mamy: } \operatorname{ctg}(\alpha - 45^\circ) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ + 1}{\operatorname{ctg} 45^\circ - \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha + 1}{1 - \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Z podanego założenia wynika, że $\frac{\operatorname{ctg} \alpha + 1}{1 - \operatorname{ctg} \alpha} = 2$, a stąd $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3}$.

Przykład 3. Przedstaw w najprostszej postaci wyrażenie $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} &= \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha - 1} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = \\ &= \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \text{ jeśli } \cos \alpha \neq 0 \text{ i } \cos \frac{\alpha}{2} \neq 0. \end{aligned}$$

Przykład 4. Przedstaw w najprostszej postaci wyrażenie:

$$\frac{\sin(\beta - \gamma)}{\cos \beta \cdot \cos \gamma} + \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\cos \gamma \cdot \cos \alpha} + \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}.$$

Rozwiązanie:

Korzystając trzykrotnie ze wzoru na sinus różnicy argumentów, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\cos \beta \cdot \cos \gamma} + \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\cos \gamma \cdot \cos \alpha} + \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} &= \frac{\sin \beta \cdot \cos \gamma - \sin \gamma \cdot \cos \beta}{\cos \beta \cdot \cos \gamma} + \\ &+ \frac{\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \gamma}{\cos \gamma \cdot \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \\ &= \frac{\sin \beta \cdot \cos \gamma}{\cos \beta \cdot \cos \gamma} - \frac{\sin \gamma \cdot \cos \beta}{\cos \beta \cdot \cos \gamma} + \frac{\sin \gamma \cdot \cos \alpha}{\cos \gamma \cdot \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha \cdot \cos \gamma}{\cos \gamma \cdot \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} - \\ &- \frac{\sin \beta \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} - \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} + \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = 0, \end{aligned}$$

jeżeli $\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \neq 0$.

Przykład 5. Przedstaw w najprostszej postaci wyrażenie $\frac{1 + \sin \alpha - \cos \alpha}{1 + \sin \alpha + \cos \alpha}$.

Rozwiązanie:

$$\frac{1 + \sin \alpha - \cos \alpha}{1 + \sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{(1 - \cos \alpha) + \sin \alpha}{(1 + \cos \alpha) + \sin \alpha} = \frac{\left[1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)\right] + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\left[1 + \left(2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1\right)\right] + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{2\sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2\cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)}{2\cos \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

jeśli $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$ i $\sin \frac{\alpha}{2} \neq -\cos \frac{\alpha}{2}$.

Przykład 6*. Wiadomo, że $\sin \alpha + \sin \beta = A$, $\cos \alpha + \cos \beta = B$. Wyznacz:

a) $\cos(\alpha - \beta)$; b) $\sin(\alpha + \beta)$; c) $\cos(\alpha + \beta)$; d) $\sin(\alpha - \beta)$.

Rozwiązanie:

Podnosząc do kwadratu obie strony podanych w założeniu równości, otrzymujemy związki:

$$(1) \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2\sin \alpha \cdot \sin \beta = A^2,$$

$$(2) \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2\cos \alpha \cdot \cos \beta = B^2.$$

Mnożąc zaś stronami, otrzymujemy równość:

$$(3) \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = AB.$$

Po dodaniu równości (1) i (2) stronami mamy równość:

$$\left(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \right) + \left(\sin^2 \beta + \cos^2 \beta \right) + 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = A^2 + B^2, \text{ skąd:}$$

$1 + 1 + 2 \cos(\alpha - \beta) = A^2 + B^2$ i ostatecznie równość:

$$\text{a) } \cos(\alpha - \beta) = \frac{A^2 + B^2}{2} - 1.$$

Po podstawieniu jej do równości (3) otrzymujemy:

$$\text{b) } \sin(\alpha + \beta) = \frac{2AB}{A^2 + B^2}.$$

Ponieważ $\sin^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta) = 1$, więc:

$$\cos^2(\alpha + \beta) = 1 - \sin^2(\alpha + \beta) = 1 - \left(\frac{2AB}{A^2 + B^2} \right)^2 = \left(\frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2} \right)^2, \text{ skąd:}$$

$$\text{c) } |\cos(\alpha + \beta)| = \frac{|A^2 - B^2|}{A^2 + B^2}.$$

Także $\sin^2(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) = 1$, zatem:

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha - \beta) &= 1 - \cos^2(\alpha - \beta) = 1 - \left(\frac{A^2 + B^2}{2} - 1 \right)^2 = \\ &= 1 - \left(\frac{A^2 + B^2}{2} \right)^2 + (A^2 + B^2) - 1 = (A^2 + B^2) - \frac{(A^2 + B^2)^2}{4} = \frac{(A^2 + B^2)(4 - A^2 - B^2)}{4}, \text{ skąd:} \end{aligned}$$

$$\text{d) } |\sin(\alpha - \beta)| = \frac{1}{2} \sqrt{(A^2 + B^2)(4 - A^2 - B^2)}.$$

Przykład 7.** Oblicz sumę $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} + \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{n} + \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{n} + \dots + \operatorname{ctg} \frac{(n-1)\pi}{n}$ dla danej liczby całkowitej dodatniej n .

Rozwiązanie:

Oznaczmy tę sumę przez S i zapiszmy ją dwojako:

$$S = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} + \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{n} + \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{n} + \dots + \operatorname{ctg} \frac{(n-1)\pi}{n}$$

oraz

$$S = \operatorname{ctg} \frac{(n-1)\pi}{n} + \operatorname{ctg} \frac{(n-2)\pi}{n} + \dots + \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{n} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}.$$

Wówczas:

$$2S = \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} + \operatorname{ctg} \frac{(n-1)\pi}{n} \right] + \left[\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{n} + \frac{(n-2)\pi}{n} \right] + \dots + \left[\operatorname{ctg} \frac{(n-1)\pi}{n} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \right].$$

Zauważmy, że suma składników w każdym z nawiasów kwadratowych wynosi 0, gdy bowiem do wzoru:

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} \text{ podstawimy w miejsce } \alpha \text{ liczbę } \frac{k\pi}{n}, \text{ a w miejsce } \beta \text{ liczbę}$$

$\frac{(n-k)\pi}{n}$, dla $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$, otrzymamy:

$$\operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n} + \operatorname{ctg} \frac{(n-k)\pi}{n} = \frac{\sin \left[\frac{k\pi}{n} + \frac{(n-k)\pi}{n} \right]}{\sin \frac{k\pi}{n} \cdot \sin \frac{(n-k)\pi}{n}} = \frac{\sin \pi}{\sin \frac{k\pi}{n} \cdot \sin \frac{(n-k)\pi}{n}} = 0.$$

Stąd $2S = 0$, czyli $S = 0$.

Przykład 8.** Wyznacz sumę:

$S = \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin k\alpha$, gdzie k jest daną liczbą całkowitą dodatnią.

Rozwiązanie:

Jeżeli $\alpha = n \cdot \pi$, gdzie $n \in \mathbb{C}$, to każdy składnik podanej sumy jest równy 0, więc również $S = 0$.

Niech zatem $\alpha \neq n\pi$. Wówczas $\sin \frac{\alpha}{2} \neq 0$.

Przekształćmy teraz wyrażenie $2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot S$. Korzystając ze wzorów:

$$(*) \quad 2 \sin x \cdot \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y),$$

$$(**) \quad \cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}, \text{ otrzymujemy:}$$

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot S = 2 \sin \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2} + 2 \sin 2\alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2} + 2 \sin 3\alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2} +$$

$$+ \dots + 2 \sin(k-1)\alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2} + 2 \sin k\alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \stackrel{(*)}{=} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3}{2}\alpha +$$

$$+ \cos \frac{3}{2}\alpha - \cos \frac{5}{2}\alpha + \cos \frac{5}{2}\alpha - \cos \frac{7}{2}\alpha + \dots + \cos \frac{(2k-3)\alpha}{2} - \cos \frac{(2k-1)\alpha}{2} +$$

$$+ \cos \frac{(2k-1)\alpha}{2} - \cos \frac{(2k+1)\alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(2k+1)\alpha}{2} \stackrel{(*)}{=} 2 \sin \frac{(k+1)\alpha}{2} \cdot \sin \frac{k\alpha}{2},$$

$$\text{czyli: } 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot S = 2 \sin \frac{(k+1)\alpha}{2} \cdot \sin \frac{k\alpha}{2}, \text{ skąd } S = \frac{\sin \frac{(k+1)\alpha}{2} \cdot \sin \frac{k\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{Odpowiedź: } S = \begin{cases} 0, \text{ gdy } \alpha = n\pi \\ \frac{\sin \frac{(k+1)\alpha}{2} \cdot \sin \frac{k\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \text{ gdy } \alpha \neq n\pi \text{ i } n \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Pytania i zadania



1. Sprowadź do postaci iloczynowej wyrażenia:

a) $\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta)$; b) $\cos^2(\alpha - \beta) - \cos^2(\alpha + \beta)$;

c) $\text{tg}^2 \alpha - \text{tg}^2 \beta$; d) $\text{ctg}^2 \alpha - \text{ctg}^2 \beta$.

2. Oblicz bez użycia tablic:

a) $\frac{\sin 10^\circ \cdot \cos 20^\circ + \cos 10^\circ \cdot \sin 20^\circ}{\cos 19^\circ \cdot \cos 11^\circ - \sin 19^\circ \cdot \sin 11^\circ}$; b) $\frac{\sin 9^\circ \cdot \cos 39^\circ - \cos 9^\circ \cdot \sin 39^\circ}{\cos \frac{3\pi}{7} \cdot \cos \frac{5\pi}{28} + \sin \frac{3\pi}{7} \cdot \sin \frac{5\pi}{28}}$;

c) $\frac{\cos 29^\circ \cdot \cos 16^\circ - \sin 29^\circ \cdot \sin 16^\circ}{\sin 29^\circ \cdot \cos 16^\circ + \sin 16^\circ \cdot \cos 29^\circ}$; d) $\frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\text{tg} 15^\circ + \text{ctg} 15^\circ}$.

3. Oblicz:

a) $\sin \alpha$, $\text{tg} \alpha$, $\text{ctg} \alpha$, jeśli $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ i $\alpha \in (180^\circ; 270^\circ)$;

b) $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\text{tg} 2\alpha$, $\text{ctg} 2\alpha$, jeśli $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ i $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$;

c) $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\text{tg} \frac{\alpha}{2}$, jeśli $\text{tg} \alpha = \frac{24}{7}$ i $\alpha \in (180^\circ; 270^\circ)$.

4. Oblicz $\cos x$, jeśli $\text{ctg} \frac{x}{2} = 2$.

5. Oblicz $\sin \frac{x}{2}$ i $\cos \frac{x}{2}$, jeśli $\sin x = \frac{1}{2}$ i $x \in (0; \pi)$.

6. Wyznacz wartość sumy:

a) $\sin \alpha + \sin(120^\circ + \alpha) + \sin(240^\circ + \alpha)$;

b) $\cos \alpha + \cos(120^\circ + \alpha) + \cos(240^\circ + \alpha)$.

7. Oblicz $(1 + \text{tg} \alpha)(1 + \text{tg} \beta)$ i $(1 - \text{ctg} \alpha)(1 - \text{ctg} \beta)$, wiedząc, że $\alpha, \beta \in (0^\circ; 90^\circ)$ i $\alpha + \beta = 45^\circ$.

8. Udowodnij, że jeżeli $\alpha, \beta \in (0^\circ; 90^\circ)$ i $\alpha - \beta = 45^\circ$, to $\frac{\text{ctg} \beta - 1}{1 + \text{ctg} \beta} = \text{ctg} \alpha$

i $\frac{1 + \text{ctg} \alpha}{1 - \text{ctg} \alpha} = \text{ctg} \beta$.

9. Oblicz $\cos 2\alpha$, wiedząc, że $\frac{6 \sin \alpha + 5 \cos \alpha}{4 \sin \alpha + \cos \alpha} = 2$.

10*. Wyznacz sumy:

a) $\sin \alpha \cdot \sin(\beta - \gamma) + \sin \beta \cdot \sin(\gamma - \alpha) + \sin \gamma \cdot \sin(\alpha - \beta)$;

b) $\cos \alpha \cdot \sin(\beta - \gamma) + \cos \beta \cdot \sin(\gamma - \alpha) + \cos \gamma \cdot \sin(\alpha - \beta)$;

c) $\cos^2 \alpha + \cos^2(120^\circ + \alpha) + \cos^2(240^\circ + \alpha)$;

d) $\cos^4 \alpha + \cos^4(120^\circ + \alpha) + \cos^4(240^\circ + \alpha)$.

11**. Przedstaw w najprostszej postaci sumy:

a) $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos k\alpha$;

b) $\frac{\sin 1}{\cos 0 \cdot \cos 1} + \frac{\sin 1}{\cos 1 \cdot \cos 2} + \frac{\sin 1}{\cos 2 \cdot \cos 3} + \dots + \frac{\sin 1}{\cos(n-1) \cos n}$;

c) $\operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg} 2 + \operatorname{tg} 2 \cdot \operatorname{tg} 3 + \dots + \operatorname{tg}(n-1) \cdot \operatorname{tg} n$;

d) $\frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 4\alpha} + \frac{1}{\sin 8\alpha} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n \alpha}$.

12*. Zapisz w najprostszej postaci iloczyn $\left(2^n \cdot \sin \frac{\alpha}{2^n}\right) \cdot \left(\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{4} \cdot \cos \frac{\alpha}{8} \cdot \dots \cdot \cos \frac{\alpha}{2^n}\right)$.

13**. Miary kątów α, β, γ trójkąta spełniają warunek:

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \cos(\alpha - \beta) \cos \gamma - \cos^2 \gamma = \frac{1}{4}.$$

Wyznacz miarę kąta γ .

4. Dowodzenie tożsamości trygonometrycznych

Dowodzeniem tożsamości trygonometrycznych zajmowaliśmy się już w klasie pierwszej. Przypomnijmy, że aby udowodnić tożsamość, należy:

1. przekształcać jedną z jej stron aż do uzyskania postaci, którą ma druga strona, albo:
2. przekształcać jej obie strony aż do uzyskania przez nie tej samej postaci.

Przykład 1. Udowodnij, że jeżeli $\cos \alpha + \cos \beta \neq 0$, to:

$$(1) \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$(2) \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Rozwiązanie:

Korzystając ze znanych nam wzorów na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych, otrzymujemy:

$$(1) \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \frac{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$(2) \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \frac{2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Przykład 2. Wykaż, że jeżeli $\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha \neq 0$,

to $\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha$.

Rozwiązanie:

$$\sin \alpha + \sin 7\alpha = 2 \sin 4\alpha \cdot \cos 3\alpha,$$

$$\sin 3\alpha + \sin 5\alpha = 2 \sin 4\alpha \cdot \cos \alpha,$$

$$\cos \alpha + \cos 7\alpha = 2 \cos 4\alpha \cdot \cos 3\alpha,$$

$$\cos 3\alpha + \cos 5\alpha = 2 \cos 4\alpha \cdot \cos \alpha.$$

$$\text{Stąd: } \frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha} = \frac{2 \sin 4\alpha (\cos \alpha + \cos 3\alpha)}{2 \cos 4\alpha (\cos \alpha + \cos 3\alpha)} = \frac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha.$$

Przykład 3. Udowodnij, że:

$$\operatorname{tg}\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2 \cos \alpha - 1}{2 \cos \alpha + 1}.$$

Rozwiązanie:

Sposób pierwszy.

$$\operatorname{tg}\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}} \text{ i podobnie:}$$

$$\operatorname{tg}\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Wobec tego:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{\cos \frac{\alpha}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 3 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) - \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right)}{2 \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) + \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right)} = \\ &= \frac{2 \cos 2 \cdot \frac{\alpha}{2} - 1}{2 \cos 2 \cdot \frac{\alpha}{2} + 1} = \frac{2 \cos \alpha - 1}{2 \cos \alpha + 1}. \end{aligned}$$

Sposób drugi.

$$\frac{2 \cos \alpha - 1}{2 \cos \alpha + 1} = \frac{\cos \alpha - \cos 60^\circ}{\cos \alpha + \cos 60^\circ} = \frac{2 \sin \left(\frac{\alpha + 60^\circ}{2} \right) \sin \left(\frac{-\alpha + 60^\circ}{2} \right)}{2 \cos \left(\frac{\alpha + 60^\circ}{2} \right) \cos \left(\frac{-\alpha + 60^\circ}{2} \right)} = \operatorname{tg} \left(30^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \operatorname{tg} \left(30^\circ - \frac{\alpha}{2} \right).$$

Przykład 4. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n i dla każdego kąta α zachodzi równość: $\sin(\alpha + n \cdot 180^\circ) \cdot \cos(n \cdot 180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$.

Rozwiązanie:

Nietrudno sprawdzić, że dla każdych x i y zachodzi równość $2 \sin x \cdot \cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y)$. Podstawiając do niej $x = \alpha + n \cdot 180^\circ$, $y = n \cdot 180^\circ - \alpha$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 2 \sin(\alpha + n \cdot 180^\circ) \cos(n \cdot 180^\circ - \alpha) &= \sin[(\alpha + n \cdot 180^\circ) - (n \cdot 180^\circ - \alpha)] + \\ &+ \sin[(\alpha + n \cdot 180^\circ) + (n \cdot 180^\circ - \alpha)] = \sin 2\alpha + \sin(2n \cdot 180^\circ) = \sin 2\alpha + 0 = \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Stąd już wynika dowodzona tożsamość.

Przykład 5*. Udowodnij, że jeżeli $\alpha \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$, $\beta \neq (2l+1) \cdot \frac{\pi}{2}$, $\gamma \neq (2m+1) \cdot \frac{\pi}{2}$ oraz $\alpha + \beta + \gamma = n\pi$, gdzie $k, l, m, n \in \mathbb{C}$, to $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $\alpha + \beta + \gamma = n \cdot \pi$, gdzie $n \in \mathbb{C}$, więc $\alpha + \beta = n\pi - \gamma$. Zatem:

$$(*) \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}(n\pi - \gamma) = \operatorname{tg}(-\gamma) = -\operatorname{tg} \gamma, \quad (**) \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

Z równości (*) i (**) otrzymujemy więc równość $-\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$, z której wynikają kolejno związki:

$$-\operatorname{tg} \gamma (1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta) = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta, \quad -\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta$$

i ostatecznie dowiedziona tożsamość: $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$.

Przykład 6. Udowodnij, że jeżeli $\alpha + \beta \neq k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$ oraz $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin(\frac{\alpha + \beta}{2})$, to $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{1}{3}$.

Rozwiązanie:

Podana w założeniu równość jest równoważna równości:

$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

która po podzieleniu jej obu stron przez $2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$ (oczywiście, gdy $\alpha + \beta \neq k\pi$, to $\frac{\alpha + \beta}{2} \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, więc $\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \neq 0$) prowadzi

$$\text{do równości } (*) \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

$$\text{Zatem } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2}} =$$

$$= \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2}} \stackrel{(*)}{=} \frac{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{3 \cos \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{1}{3}, \text{ gdyż:}$$

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \neq 0 \text{ przy założeniu, że } \alpha + \beta \neq k\pi.$$



Pytania i zadania

1. Wykaż tożsamości:

a) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = 2 \sin^2 \alpha - 1$;

b) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \sin 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$;

c) $\frac{\sin 5\alpha + \sin 3\alpha}{\cos 5\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha$;

d) $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = 1$;

e) $\frac{\sin \alpha - \sin 3\alpha}{\cos 3\alpha - \cos \alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha$;

f) $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$.

2. Udowodnij, że:

a) $\frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = \operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha}{2}$;

b) $\frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)} = \operatorname{ctg} \alpha$;

$$c) \frac{\operatorname{tg}^2(45^\circ + \alpha) - 1}{\operatorname{tg}^2(45^\circ + \alpha) + 1} = \sin 2\alpha; \quad d) \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} - \frac{2 \cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta}.$$

3. Udowodnij, że jeżeli $\cos \alpha + \cos \beta = A$ oraz $\sin \alpha - \sin \beta = B$, to $\cos(\alpha - \beta) = \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}$.

4. Wykaż tożsamości:

$$a) \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\cos \alpha - \cos 3\alpha}{\sin 3\alpha - \sin \alpha}; \quad b) \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha}.$$

5. Udowodnij, że:

$$a) \frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}; \quad b) \frac{\cos^3 \alpha - \cos 3\alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\sin \alpha} = 3.$$

6. Wykaż, że jeżeli $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, to:

$$a) \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2};$$

$$b) \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}.$$

7*. Liczby rzeczywiste a, α, β, γ spełniają równości:

$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{\cos(\alpha + \beta + \gamma)} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)} = a.$$

Udowodnij, że $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\beta + \gamma) + \cos(\gamma + \alpha) = a$

i $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha) = 0$.

8. Udowodnij poniższe twierdzenie, zwane **twierdzeniem tangensów**:

W każdym trójkącie różnica długości dwóch boków ma się do sumy ich długości tak, jak tangens połowy różnicy przeciwległych im kątów do tangensa połowy sumy tych kątów.

9*. Udowodnij, że jeżeli $\alpha \neq k\pi$, $\beta \neq l\pi$, $\gamma \neq m\pi$, gdzie $k, l, m \in \mathbb{C}$ oraz

$$\alpha + \beta + \gamma = (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ to:}$$

$$a) \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \gamma;$$

$$b) \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha = 1.$$

5. Równania i nierówności trygonometryczne

Zastosujmy poznane wzory do rozwiązywania równań i nierówności trygonometrycznych.

Przykład 1. Rozwiąż równanie $\sin x + \cos x = 1$.

Rozwiązanie:

$$\text{Ponieważ } \sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\text{więc } \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{C}.$$

Odpowiedź: Rozwiązaniami danego równania są liczby: $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$.

Przykład 2. Rozwiąż równanie $\cos x - \sin x + \sin 2x = 1$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.

Rozwiązanie:

Równanie to jest równoważne kolejno równaniom:

$$(1 - \sin 2x) + (\sin x - \cos x) = 0,$$

$$(\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x) + (\sin x - \cos x) = 0,$$

$$(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x - \cos x) = 0,$$

$(\sin x - \cos x)(\sin x - \cos x + 1) = 0$, ostatnie zaś równanie jest równoważne alternatywie równań: $\sin x - \cos x = 0$ lub $\sin x - \cos x = -1$.

Zauważmy, że gdy $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, to:

$$1. \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ lub } x = \frac{5}{4}\pi, \text{ natomiast:}$$

$$2. \sin x - \cos x = -1 \Leftrightarrow \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{x - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2} \cdot \cos \frac{x + \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2} = -1 \Leftrightarrow 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos \frac{\pi}{4} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \text{ lub}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi \text{ lub } x - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi \Leftrightarrow x = 0 \text{ lub } x = \frac{3}{2}\pi \text{ lub } x = 2\pi.$$

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań danego równania w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$ jest:

$$\left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi\right\}.$$

Przykład 3. Rozwiąż równanie $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.

Rozwiązanie:

Z określenia tangensa wynika, że dane równanie ma w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$ sens, gdy $x \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{11}{6}\pi\right\}$. Dla takich x jest ono wówczas równoważne kolejno równaniom:

$$\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}, \quad \frac{\sin x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos x}{\cos x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3},$$

$$\frac{\sin\left(x - \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right)}{\cos x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}, \quad \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2 \cos x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3},$$

$$2 \cos x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1, \quad \cos\left[x - \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] + \cos\left[x + \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] = 1,$$

$$\cos \frac{\pi}{3} + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1, \quad \frac{1}{2} + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1, \quad \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2};$$

$$\text{zaś } \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \quad \text{lub} \quad 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi, \quad \text{lub} \quad 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{7}{3}\pi, \quad \text{lub} \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{11}{3}\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}, \quad \text{lub} \quad x = \pi, \quad \text{lub} \quad x = \frac{4}{3}\pi, \quad \text{lub} \quad x = 2\pi.$$

Odpowiedź: Rozwiązaniami danego równania w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$ są liczby: $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{4}{3}\pi$, $x_4 = 2\pi$.

Przykład 4. Rozwiąż równanie $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} = 2\sqrt{2}$ w przedziale $\langle -\pi; \pi \rangle$.

Rozwiązanie:

Należy najpierw założyć, że $\sin x \neq 0$ i $\cos x \neq 0$, co w podanym przedziale zachodzi, gdy $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, gdzie $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Wówczas dla takich x podane równanie jest równoważne kolejno równaniom:

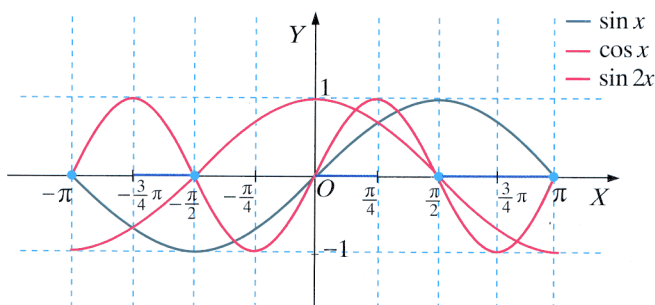
$$\frac{\cos x - \sin x}{\sin x \cdot \cos x} = 2\sqrt{2}, \quad \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cdot 2 \sin x \cdot \cos x, \quad \cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin 2x.$$

Zauważmy teraz, że ostatnie z tych równań nie zachodzi

w przedziałach: $\left(-\pi; -\frac{3}{4}\pi\right)$,

$\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, w których

obie strony tego równania przybierają wartości przeciwnych znaków (ryc. 3.6). Jest ono więc w przedziałach:



Ryc. 3.6.

$\left(-\frac{3}{4}\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ i $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ równoważne kolejno równaniom: $(\cos x - \sin x)^2 = (\sqrt{2} \sin 2x)^2$,

$$\cos^2 x - 2 \cos x \sin x + \sin^2 x = 2 \sin^2 2x, \quad 1 - \sin 2x = 2 \sin^2 2x, \quad 2 \sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0,$$

$$2(\sin 2x + 1)\left(\sin 2x - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Z kolei równanie $2(\sin 2x + 1)\left(\sin 2x - \frac{1}{2}\right) = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\sin 2x = -1$ lub $\sin 2x = \frac{1}{2}$.

Tymczasem, jeśli $x \in \left(-\frac{3}{4}\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, to:

$$1. \sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = \frac{3}{2}\pi \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}\pi;$$

$$2. \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = -\frac{7}{6}\pi \quad \text{lub} \quad 2x = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{12}\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{12}.$$

Zatem:

Odpowiedź: Rozwiązaniami danego równania są w przedziale $\langle -\pi; \pi \rangle$ liczby: $x_1 = -\frac{7}{12}\pi$,

$$x_2 = \frac{\pi}{12}, \quad x_3 = \frac{3}{4}\pi.$$

Uwaga. Równanie $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin 2x$ można rozwiązać krócej, gdy zauważy, że jest ono równoważne kolejno równaniom:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x - \sin x) = \sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos x - \sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 2x,$$

$$\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \sin 2x, \quad \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \sin 2x,$$

Dalej mamy: $\sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \sin 2x \Leftrightarrow 2x = \left(\frac{\pi}{4} - x \right) + 2k\pi$ lub $2x = \left(\frac{3}{4}\pi + x \right) + 2k\pi \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi, \quad \text{lub} \quad x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{C}.$$

Uwzględniając podany przedział, otrzymujemy rozwiązania podane wcześniej w odpowiedzi.

Przykład 5. Rozwiąż równanie $\frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} x}{1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} x} = 1$.

Rozwiązanie:

Równanie to ma sens dla takich x , że: $1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} x \neq 0$, czyli $\operatorname{tg} x \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$, a więc $x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$.

Wówczas na mocy wzoru na $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$:

$$\frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} x}{1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} x} = 1 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \operatorname{tg} x} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} + x \right) = 1, \quad \text{zaś}$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} + x \right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{C}.$$

Odpowiedź: Rozwiązaniami danego równania są liczby postaci: $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$.

Przykład 6. Rozwiąż równanie $|\cos^4 x - \sin^4 x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą równości:

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 \cdot \cos 2x = \cos 2x, \quad \text{więc:}$$

$$|\cos^4 x - \sin^4 x| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |\cos 2x| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{lub} \quad \cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \quad \text{lub} \quad 2x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{8}\pi + k\pi \quad \text{lub} \quad x = \pm \frac{\pi}{8} + k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{C}.$$

Odpowiedź: Rozwiązaniami danego równania są liczby: $x_1 = -\frac{3}{8}\pi + k\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{8} + k\pi$, $x_3 = \frac{\pi}{8} + k\pi$, $x_4 = \frac{3}{8}\pi + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$.

Przykład 7*. Rozwiąż równanie:

$$\frac{1 - \sin x + \sin^2 x - \sin^3 x + \dots + (-1)^n \sin^n x + \dots}{1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \dots + \sin^n x + \dots} = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}.$$

Rozwiązanie:

Po lewej stronie tego równania mamy ułamek, w którego liczniku i mianowniku występują sumy szeregów geometrycznych o ilorazach odpowiednio $q_1 = -\sin x$ i $q_2 = \sin x$.

Przy założeniu, że $|\sin x| < 1$, sumy te wynoszą odpowiednio:

$$1 - \sin x + \sin^2 x - \sin^3 x + \dots + (-1)^n \sin^n x + \dots = \frac{1}{1 + \sin x},$$

$$1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \dots + \sin^n x + \dots = \frac{1}{1 - \sin x}.$$

Ponieważ: $|\sin x| < 1 \Leftrightarrow |\sin x| \neq 1 \Leftrightarrow \sin^2 x \neq 1 \Leftrightarrow 2\sin^2 x \neq 2 \Leftrightarrow -2\sin^2 x \neq -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x \neq -1 \Leftrightarrow \cos 2x \neq -1 \Leftrightarrow \cos 2x + 1 \neq 0$, więc dla tych x , dla których $|\sin x| < 1$ rozwiązywane równanie jest równoważne kolejno równaniom:

$$\frac{1}{1 + \sin x} = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x},$$

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x},$$

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \frac{1 - (1 - 2\sin^2 x)}{1 + (2\cos^2 x - 1)},$$

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x},$$

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \frac{\sin^2 x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)},$$

$$(1 - \sin x)^2 = \sin^2 x,$$

$$1 - 2\sin x + \sin^2 x = \sin^2 x,$$

$$\sin x = \frac{1}{2}, \text{ zaś } \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{C},$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + n\pi, \text{ gdzie } n \in \mathbb{C}.$$

Odpowiedź: Rozwiązaniami podanego równania są liczby: $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + n\pi$, gdzie $n \in \mathbb{C}$.

Przykład 8. Rozwiąż nierówność $\sin x - \sqrt{3} \cos x > 1$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.

Rozwiązanie:

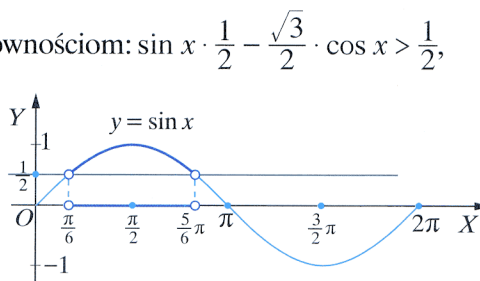
Nierówność ta jest równoważna kolejno nierównościami: $\sin x \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x > \frac{1}{2}$,

$$\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos x > \frac{1}{2},$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2}.$$

Przeglądając się wykresowi funkcji $f(x) = \sin x$ dla $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ (ryc. 3.7),

stwierdzamy, że $\sin x > \frac{1}{2}$ dla $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$.



Ryc. 3.7.

$$\text{Zatem: } \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} < x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{6}\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{6}\pi + \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < x < \frac{7}{6}\pi.$$

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań danej nierówności jest przedział $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{7}{6}\pi\right)$.

Przykład 9. Rozwiąż nierówność $\text{ctg } 2x - \text{tg } 2x \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ w przedziale $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Rozwiązanie:

Dana nierówność ma w wymienionym przedziale sens, gdy $x \neq \frac{\pi}{4}$, wtedy bowiem (i tylko wtedy) $\cos 2x \neq 0$ i $\sin 2x \neq 0$. Ponieważ jednocześnie:

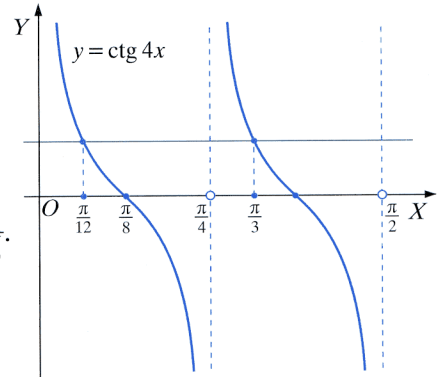
$$\begin{aligned} \text{ctg } 2x - \text{tg } 2x &= \frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \\ &= \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\sin 2x \cdot \cos 2x} = \frac{\cos 4x}{\sin 2x \cos 2x} = \\ &= \frac{2 \cos 4x}{2 \sin 2x \cos 2x} = \frac{2 \cos 4x}{\sin 4x} = 2 \cdot \text{ctg } 4x, \text{ więc:} \end{aligned}$$

$$\text{ctg } 2x - \text{tg } 2x \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2 \text{ctg } 4x \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \text{ctg } 4x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Z wykresu funkcji $y = \text{ctg } 4x$ dla $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

(ryc. 3.8) odczytujemy, że:

$$\text{ctg } 4x \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x \in \left\langle \frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$



Ryc. 3.8.

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań podanej nierówności jest $\left\langle \frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Przykład 10. Rozwiąż nierówność $\sin^3 x \cdot \cos x - \cos^3 x \cdot \sin x \geq -\frac{1}{4}$.

Rozwiązanie:

Nierówność ta jest równoważna kolejno nierównościom:

$$\sin x \cdot \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) \geq -\frac{1}{4},$$

$$-\sin x \cdot \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) \geq -\frac{1}{4},$$

$$-\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \geq -\frac{1}{4},$$

$$4 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \leq 1,$$

$$2 \cdot 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \leq 1,$$

$$2 \sin 2x \cdot \cos 2x \leq 1,$$

$$\sin 4x \leq 1.$$

Ponieważ ostatnia z nich zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej x (co wynika z własności sinusa), więc dana nierówność, jako jej równoważna, także spełniona jest przez każdą liczbę rzeczywistą x .

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań podanej nierówności jest zbiór \mathbf{R} wszystkich liczb rzeczywistych (jest ona tożsamościowa w tym zbiorze).

Przykład 11*. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x z przedziału $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ zachodzi nierówność $\sin 2x + \cos x > 1$.

Rozwiązanie:

Dana nierówność jest równoważna kolejno nierównościom:

$$2 \sin x \cdot \cos x > 1 - \cos x,$$

$$2 \sin x \cdot \cos x > 1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right),$$

$$2 \sin x \cdot \cos x > 2 \sin^2 \frac{x}{2},$$

$$2 \cos x > \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin x}, \quad (\text{bo } \sin x > 0 \text{ dla } x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)),$$

$$2 \cos x > \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}},$$

$$2 \cos x > \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Ponieważ dla $x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ zachodzą nierówności: $2 \cos x > 2 \cos \frac{\pi}{3} = 1$, zaś $\operatorname{tg} \frac{x}{2} < \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$, więc nierówność $2 \cos x > \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ jest prawdziwa dla każdego $x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$. Zatem równoważna jej nierówność $\sin 2x + \cos x > 1$ też zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$.

Przykład 12*. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{C}$, zachodzi nierówność $\left|\frac{\cos 2x + 3}{\cos x}\right| \geq 4$.

Rozwiązanie:

$$\left|\frac{\cos 2x + 3}{\cos x}\right| \geq 4 \Leftrightarrow \left|\frac{2 \cos^2 x - 1 + 3}{\cos x}\right| \geq 4 \Leftrightarrow \frac{2 \cos^2 x + 2}{|\cos x|} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x + 1}{|\cos x|} \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x + 1 \geq 2|\cos x| \Leftrightarrow (|\cos x| - 1)^2 \geq 0.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x , więc nierówność dana w zadaniu, jako jej równoważna dla $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, jest także prawdziwa.

Pytania i zadania



1. Rozwiąż równania:

a) $\sin x - \cos x = 1$;

b) $\sin x + \sin 2x = 1$;

c) $\cos x + \cos 2x = -1$;

d) $\sin 3x + \sin x = \cos 3x + \cos x$;

e) $\sin 3x - \sin x = \sin 2x$;

f) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$.

2. Rozwiąż równania:

a) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}$;

b) $2 \cos x - \sin x = 1$;

c) $\operatorname{tg} x + \cos x = \frac{1}{\cos x} - \sin x$;

d) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$;

e) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 3x = 1$;

f) $1 + \cos 2x = 2 \sin x$.

3. Rozwiąż równania:

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$;

b) $\sin^4 x - \cos^4 x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

c) $\sin x + \cos x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$;

d) $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2$;

e) $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x$;

f) $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin x$.

4. Rozwiąż równania:

a) $\frac{\cos 3x - \cos x}{\sin 3x + \sin x} = \sqrt{3}$;

b) $\cos^4 x - \sin^4 x = \sin 2x$;

c) $2 \sin^2 4x = 3 - 2 \sin^2 2x$;

d) $\frac{\sqrt{3} \operatorname{ctg} x - 1}{\operatorname{ctg} x + \sqrt{3}} = 1$.

5. Rozwiąż nierówności:

a) $\cos 2x + \cos x > 0$;

b) $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x < 1$;

c) $\cos 3x + \sqrt{3} \sin 3x < -\sqrt{2}$;

d) $\sin 3x > \cos 3x$;

e) $\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} \geq 3 \operatorname{tg} x$;

f) $\sin x + \cos x > \sqrt{2} \cos 2x$.

6. Rozwiąż nierówności:

a) $\frac{\sin 3x - \cos 3x}{\sin 3x + \cos 3x} < 0$;

b) $\sin^3 x - 4 \sin^2 x - \sin x + 4 \geq 0$;

c) $\cos 4x + 2 \cos^2 x \geq 1$;

d) $\frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} \leq 0$.

7*. Udowodnij, że jeżeli $k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$, to $\left| \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \right| \leq 1$.

8*. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą nierówności:

$$-4 \leq \cos 2x + 3 \sin x \leq \frac{17}{8}.$$

9*. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $|\sin nx| \leq n |\sin x|$.

10**. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y oraz dowolnej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $|\cos nx - \cos ny| \leq n^2 |\cos x - \cos y|$.

11*. Wyznacz wszystkie wartości parametru a , dla których równanie $\operatorname{tg}^3 x + 1 = a(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x)$ ma w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ dwa rozwiązania.

12*. Dla jakich wartości a i b równanie $\cos^2 x + a \cos x + b = 0$ ma w przedziale $(-\pi; \pi)$ trzy rozwiązania?

13. Dla jakich wartości a układ równań $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4} \\ \cos x \cdot \cos y = a \end{cases}$ ma rozwiązanie?

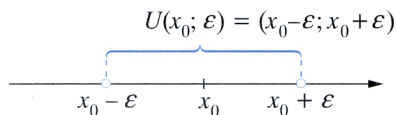
14*. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $\frac{\sin x - 1}{\sin x - 2} + \frac{1}{2} \geq \frac{2 - \sin x}{3 - \sin x}$.

IV. Elementy analizy matematycznej

1. Granica funkcji w punkcie

Omawiając w klasie drugiej granicę ciągu nieskończonego, posługiwaliśmy się terminem: otoczenie punktu na osi liczbowej. Przypomnijmy teraz to pojęcie, gdyż będzie ono nam potrzebne w dalszym toku nauki o granicy funkcji. Dodajmy jednocześnie, że funkcje, o których będzie mowa, zawsze określone będą na przedziale bądź na sumie przedziałów.

Otoczeniem $U(x_0; \varepsilon)$ punktu x_0 o promieniu $\varepsilon > 0$ na osi liczbowej nazywamy przedział $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ (ryc. 4.1).



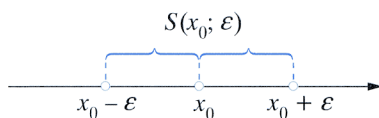
Ryc. 4.1.

Na przykład:

- otoczeniem liczby 1 o promieniu 3 jest przedział $(-2; 4)$,
- otoczeniem liczby -2 o promieniu 2 jest przedział $(-4; 0)$,
- otoczeniem liczby 0 o promieniu $\frac{2}{3}$ jest przedział $(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$.

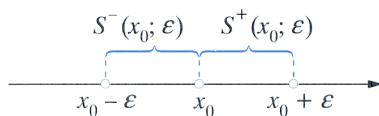
Zatem liczba rzeczywista a należy do otoczenia $U(x_0; \varepsilon)$, gdy: $x_0 - \varepsilon < a < x_0 + \varepsilon$, czyli gdy $-\varepsilon < a - x_0 < \varepsilon$, a więc, gdy $|a - x_0| < \varepsilon$.

Jeśli z otoczenia $U(x_0; \varepsilon)$ usuniemy punkt x_0 , otrzymamy zbiór $(x_0 - \varepsilon; x_0) \cup (x_0; x_0 + \varepsilon)$, który oznaczać będziemy symbolem $S(x_0; \varepsilon)$. Zbiór ten nazywamy **śsąsiedztwem** punktu x_0 o promieniu ε (ryc. 4.2).



Ryc. 4.2.

Przedział $(x_0 - \varepsilon; x_0)$ nazywamy **śsąsiedztwem lewostronnym**, a przedział $(x_0; x_0 + \varepsilon)$ – **śsąsiedztwem prawostronnym** punktu x_0 o promieniu $\varepsilon > 0$. Przedziały te oznaczać będziemy symbolami – odpowiednio: $S^-(x_0; \varepsilon)$ i $S^+(x_0; \varepsilon)$ (ryc. 4.3).



Ryc. 4.3.

Do śsąsiedztwa $S(x_0; \varepsilon)$ należą więc wszystkie punkty z otoczenia $U(x_0; \varepsilon)$, z wyjątkiem punktu x_0 .

Niech f będzie funkcją określoną w pewnym sąsiedztwie S danego punktu x_0 . W samym punkcie x_0 może ona być nieokreślona.



Liczbę g nazywamy granicą funkcji f w punkcie x_0 , gdy dla każdego ciągu (x_n) liczb z sąsiedztwa S , zbieżnego do x_0 , ciąg $(f(x_n))$ wartości funkcji f dla ciągu (x_n) jest zbieżny do g .

Fakt, że g jest granicą funkcji f w punkcie x_0 zapisujemy symbolicznie: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$
lub $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} g$.

Tę definicję granicy funkcji nazywamy **definicją Heinego**. Zgodnie z nią, aby wyznaczyć granicę funkcji w danym punkcie x_0 , należy:

- stwierdzić, że funkcja ta jest określona co najmniej w jakimś sąsiedztwie S tego punktu,
- obliczyć granicę ciągu $(f(x_n))$, czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$, dla dowolnego ciągu (x_n) o wyrazach z sąsiedztwa S i zbieżnego do x_0 .

Wówczas $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$.

Przykład 1. Oblicz $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że funkcja $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ jest określona dla każdego $x \neq 1$, a więc w każdym sąsiedztwie punktu $x_0 = 1$, natomiast nie jest określona dla punktu $x_0 = 1$ (ryc. 4.4).

Ponieważ dla dowolnego ciągu (x_n) takiego, że:

$x_n \neq 1$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$

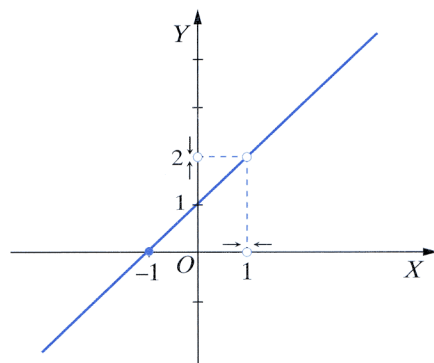
mamy: $f(x_n) = \frac{x_n^2 - 1}{x_n - 1} = \frac{(x_n - 1)(x_n + 1)}{x_n - 1} = x_n + 1$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + 1) = 1 + 1 = 2$,

więc zgodnie z podaną definicją $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

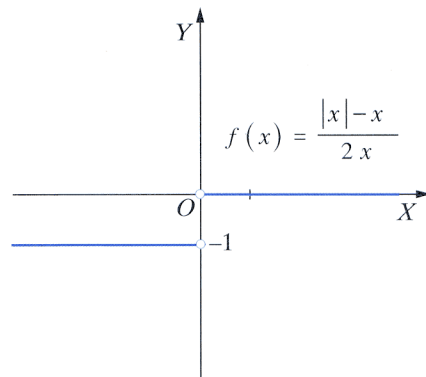
Przykład 2. Oblicz $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - x}{2x}$.

Rozwiązanie:

Niech $f(x) = \frac{|x| - x}{2x}$. Funkcja ta jest określona dla każdego $x \neq 0$, czyli w każdym sąsiedztwie punktu $x_0 = 0$, nie jest zaś określona w tym punkcie $x \neq 0$ (ryc. 4.5).



Ryc. 4.4.



Ryc. 4.5.

Wykażemy, że nie istnieje $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - x}{2x}$. W tym celu wystarczy wskazać dwa ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach różnych od zera i zbieżne do zera oraz odpowiadające im ciągi wartości funkcji f : $(f(a_n))$ i $(f(b_n))$, które nie są zbieżne do tej samej granicy.

Jeśli (a_n) jest ciągiem o wyrazach dodatnich i zbieżnym do zera, zaś (b_n) – ciągiem o wyrazach ujemnych, zbieżnym do zera, to odpowiadające im ciągi wartości funkcji f : $(f(a_n))$ i $(f(b_n))$ są określone wzorami:

$$f(a_n) = \frac{|a_n| - a_n}{2a_n} = \frac{a_n - a_n}{2a_n} = 0, \quad f(b_n) = \frac{|b_n| - b_n}{2b_n} = \frac{-b_n - b_n}{2b_n} = \frac{-2b_n}{2b_n} = -1,$$

więc $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0$, zaś $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = -1$.

Poznamy teraz drugą definicję granicy funkcji, równoważną poprzedniej, zwaną **definicją Cauchy'ego** (czytaj: Kosziego).

Funkcja f ma w punkcie x_0 granicę g , jeśli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ znajdziemy taką liczbę $\delta > 0$, że dla wszystkich x z sąsiedztwa S punktu x_0 , spełniających nierówność $0 < |x - x_0| < \delta$, zachodzi nierówność $|f(x) - g| < \varepsilon$.

Symbolicznie zapisujemy to w następujący sposób:

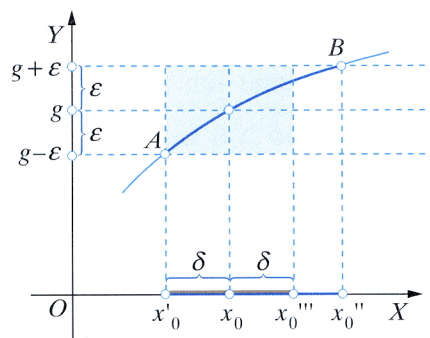
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in S} [0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon].$$

Inaczej mówiąc: liczba g jest granicą funkcji f w punkcie x_0 , gdy dla argumentów x dostatecznie bliskich x_0 i różnych od x_0 wartości $f(x)$ są dowolnie bliskie g .

Zinterpretujmy tę definicję geometrycznie. W tym celu na osi OY obierzmy punkt g oraz punkty $g - \varepsilon$ i $g + \varepsilon$, gdzie ε jest dowolną liczbą dodatnią. Przez punkty $g - \varepsilon$ i $g + \varepsilon$ poprowadźmy proste równoległe do osi OX . Jeżeli przetną one wykres funkcji f w takich punktach A i B (ryc. 4.6), że rzut odcinka AB wykresu funkcji f na oś OX zawiera takie jego sąsiedztwo, w którym punkty x z tego sąsiedztwa spełniają nierówność $|f(x) - g| < \varepsilon$, to liczba g jest granicą funkcji f w punkcie x_0 . Rzeczywiście: $|f(x) - g| < \varepsilon$ i $0 < |x - x_0| < \delta$, czyli równoważnie:

$$(*) \quad g - \varepsilon < f(x) < g + \varepsilon \quad \text{i} \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \quad (x \neq x_0).$$

Zauważmy, że liczby $f(x)$ spełniające pierwszą z nierówności $(*)$ należą do przedziału $(g - \varepsilon; g + \varepsilon)$ o środku g i długości 2ε na osi OY , zaś liczby x spełniające drugą nierówność należą do sumy przedziałów $(x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$ o długości δ każdy na osi OX . Dobranie do dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ liczby $\delta > 0$ oznacza więc dobranie do przedziału $(g - \varepsilon; g + \varepsilon)$



Ryc. 4.6.

^{*)} Jeśli proste te nie przecinają wykresu funkcji f , to rzutujemy na oś OX tę część wykresu funkcji f , która jest między tymi prostymi.

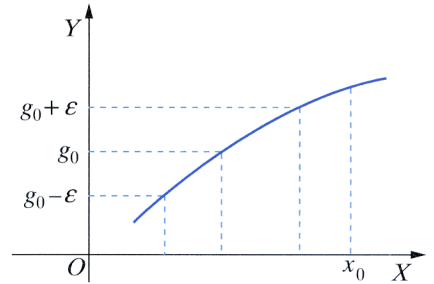
takiej sumy przedziałów $(x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$, aby dla x należących do niej wartości $f(x)$ różniły się od g o mniej niż ε , a więc aby spełniały nierówności $g - \varepsilon < f(x) < g + \varepsilon$ lub, co jest równoważne, nierówność $|f(x) - g| < \varepsilon$.

Symbole x_0' i x_0'' na rycinie 4.6 oznaczają punkty (o ile istnieją), w których $f(x_0') = g - \varepsilon$, $f(x_0'') = g + \varepsilon$, $\delta = \min\{x_0 - x_0', x_0'' - x_0\}$.

Oczywiście, jeśli nierówność $|f(x) - g| < \varepsilon$ jest spełniona dla x ze zbioru $(x_0'; x_0'') \setminus \{x_0\}$, to jest także spełniona dla x ze zbioru $(x_0'; x_0''') \setminus \{x_0\}$ (zob. ryc. 4.6 na poprzedniej stronie).

Z podanej definicji wynika też, że jeżeli liczba g_0 nie jest granicą funkcji f w punkcie x_0 , to istnieje liczba $\varepsilon_0 > 0$, dla której nie można dobrać takiej liczby $\delta > 0$, aby dla każdego x spełniającego warunek $0 < |x - x_0| < \delta$ zachodziła nierówność $|f(x) - g| < \varepsilon$ (ryc. 4.7).

Zachodzi następujące twierdzenie:



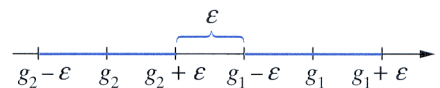
Ryc. 4.7.

Twierdzenie

Jeżeli funkcja ma w danym punkcie granicę, to tylko jedną.

Dowód. Rozumujemy przez sprowadzenie do sprzeczności. Załóżmy, że funkcja f ma w jakimś punkcie x_0 dwie różne granice: g_1 i g_2 . Przyjmijmy, że $g_1 > g_2$, i obierzmy $\varepsilon = \frac{1}{3}(g_1 - g_2)$. Ponieważ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g_1$, więc istnieje taka liczba $\delta_1 > 0$, że:

(1) $g_1 - \varepsilon < f(x) < g_1 + \varepsilon$, jeśli $0 < |x - x_0| < \delta_1$. Jednocześnie $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g_2$, więc istnieje też taka liczba $\delta_2 > 0$, że:



Ryc. 4.8.

(2) $g_2 - \varepsilon < f(x) < g_2 + \varepsilon$, jeśli $0 < |x - x_0| < \delta_2$ (ryc. 4.8).

Zatem dla x spełniających warunek $0 < |x - x_0| < \delta$, gdzie $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, powinny zachodzić obie nierówności (1) i (2), co jest niemożliwe, gdyż nierówności te są sprzeczne.

Przykład 3. Korzystając z definicji Cauchy'ego, wykaż, że funkcja $f(x) = x^2$ ma w punkcie $x_0 = 2$ granicę $g = 4$.

Rozwiązanie:

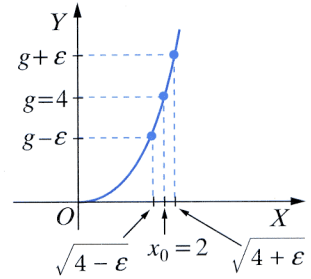
Aby wykazać, że $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$, obierzmy dowolną liczbę ε taką, że $0 < \varepsilon < 4$, i znajźmy taką liczbę $\delta > 0$, aby $4 - \varepsilon < f(x) < 4 + \varepsilon$, jeśli $0 < |x - 2| < \delta$. Dla podanej funkcji oznacza to, że $4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon$, jeśli $0 < |x - 2| < \delta$. Ale nierówność $4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon$ będzie spełniona, jeśli:

$$\sqrt{4 - \varepsilon} < x < \sqrt{4 + \varepsilon}, \text{ czyli } \sqrt{4 - \varepsilon} - 2 < x - 2 < \sqrt{4 + \varepsilon} - 2, \text{ to jest, gdy:}$$

$$-(2 - \sqrt{4 - \varepsilon}) < x - 2 < \sqrt{4 + \varepsilon} - 2.$$

Wystarczy zatem dla dowolnego $\varepsilon \in (0; 4)$ przyjąć $\delta = \min \{2 - \sqrt{4 - \varepsilon}, \sqrt{4 + \varepsilon} - 2\}$. Wówczas dla $2 - \delta < x < 2 + \delta$ i $x \neq 2$, czyli dla $0 < |x - 2| < \delta$, będzie $|f(x) - 4| < \varepsilon$ (ryc. 4.9). Gdy istnieje granica funkcji, to tę granicę nazywamy **właściwą** lub **skończoną**.

Podamy teraz definicje granic funkcji, zwanych granicami niewłaściwymi lub **granicami Heinego**.



Ryc. 4.9.

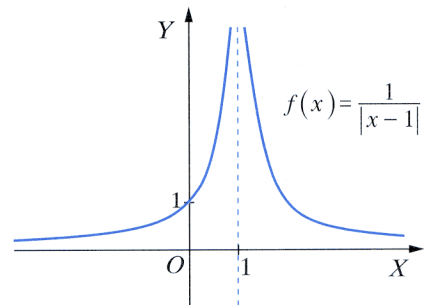
Funkcja f ma w punkcie x_0 **granicę niewłaściwą** $-\infty$, co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, gdy dla każdego ciągu (x_n) liczb z sąsiedztwa S , zbieżnego do x_0 , ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny do $-\infty$.

Funkcja f ma w punkcie x_0 **granicę niewłaściwą** $+\infty$, co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, gdy dla każdego ciągu (x_n) liczb z sąsiedztwa S , zbieżnego do x_0 , ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny do $+\infty$.

Przykład 4. Wyznacz $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x - 1|}$.

Rozwiązanie:

Funkcja $f(x) = \frac{1}{|x - 1|}$ jest określona dla każdego $x \neq 1$, a więc w każdym sąsiedztwie punktu 1. Zatem dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach $x_n \neq 1$, zbieżnego do 1, ciąg $(f(x_n))$ określony wzorem $f(x_n) = \frac{1}{|x_n - 1|}$ jest rozbieżny do $+\infty$. Stąd, na mocy podanej definicji, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x - 1|} = +\infty$ (ryc. 4.10).



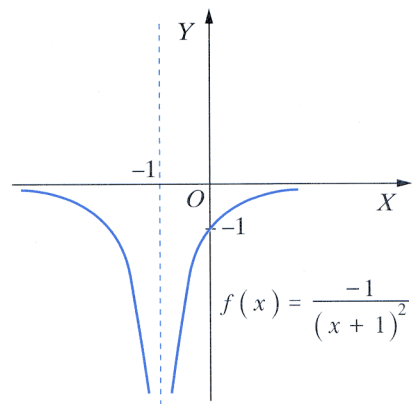
Ryc. 4.10.

Przykład 5. Oblicz $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-1}{(x + 1)^2}$.

Rozwiązanie:

Funkcja $f(x) = \frac{-1}{(x + 1)^2}$ jest określona w każdym sąsiedztwie punktu -1 . Oznacza to, że dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach $x_n \neq -1$, zbieżnego do -1 , ciąg $(f(x_n))$, czyli ciąg $\left(\frac{-1}{(x_n + 1)^2}\right)$, jest rozbieżny do $-\infty$.

Stąd: $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{-1}{(x + 1)^2}\right) = -\infty$ (ryc. 4.11).

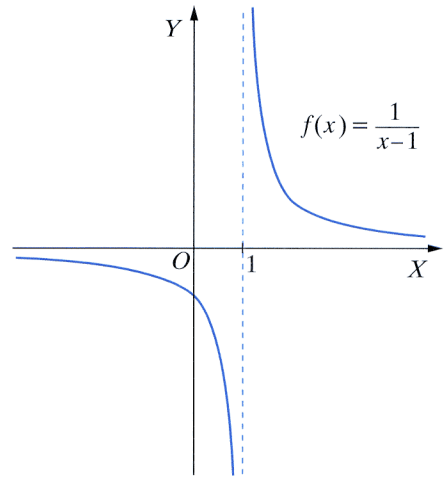


Ryc. 4.11.

Przykład 6. Wykaż, że nie istnieje $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$.

Rozwiązanie:

Funkcja $f(x) = \frac{1}{x-1}$ jest określona w każdym sąsiedztwie punktu 1. Aby udowodnić, że nie istnieje $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, wystarczy wskazać dwa ciągi (x_n) i (x_n') o wyrazach $x_n \neq 1$ i $x_n' \neq 1$, zbieżne do 1 i takie, że odpowiadające im ciągi $(f(x_n))$ i $(f(x_n'))$ mają różne granice. Niech $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, zaś $x_n' = 1 + \frac{1}{n}$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Wówczas ciągi $(f(x_n))$ i $(f(x_n'))$ określone wzorami: $f(x_n) = \frac{1}{1 - \frac{1}{n} - 1} = -n$ i $f(x_n') = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} - 1} = n$ są rozbieżne odpowiednio do $-\infty$ i $+\infty$ (ryc. 4.12).

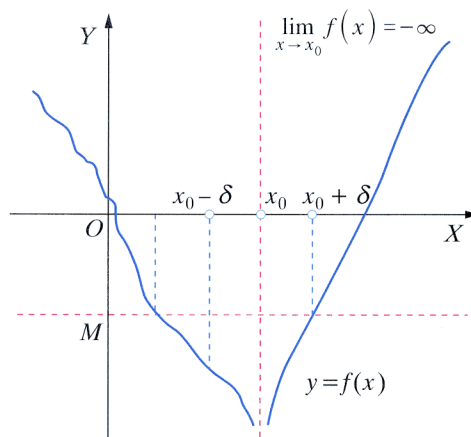


Ryc. 4.12.

Definicjom Heinego równoważne są definicje Cauchy'ego. Oto one:

! Funkcja f ma w punkcie x_0 **granice** $-\infty$, gdy dla każdej liczby $M < 0$ można znaleźć taką liczbę $\delta > 0$, że $f(x) < M$ dla wszystkich x spełniających nierówność $0 < |x - x_0| < \delta$.

Interpretację geometryczną powyższej definicji granicy niewłaściwej $-\infty$ przedstawia rycina 4.13.



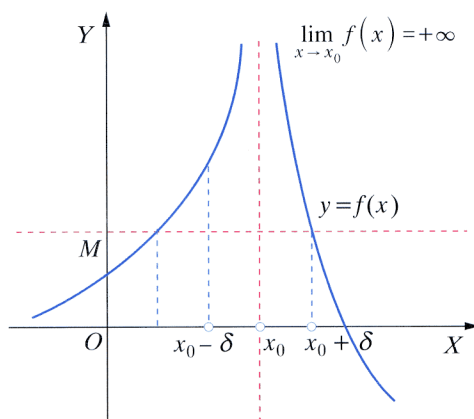
Ryc. 4.13.

Symbolicznie można to zapisać następująco:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \bigwedge_{M < 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in S} [0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < M].$$

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 **granice niewłaściwą** $+\infty$, gdy dla każdej liczby $M > 0$ znajdziemy taką liczbę $\delta > 0$, że $f(x) > M$ dla wszystkich x spełniających nierówność $0 < |x - x_0| < \delta$.

Geometryczny sens tej definicji przedstawia rycina 4.14.



Ryc. 4.14.

Zapis symboliczny: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \bigwedge_{M > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in S} [0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M]$.

Przykład 7. Korzystając z definicji Cauchy'ego, wykaż, że $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$.

Rozwiązanie:

Niech M będzie dowolną liczbą ujemną. Zgodnie z definicją, należy znaleźć taką liczbę $\delta > 0$, by z nierówności $0 < |x - 0| < \delta$ wynikała nierówność $-\frac{1}{x^2} < M$. Ponieważ:

$$-\frac{1}{x^2} < M \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > -M \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{-M} \quad \text{i} \quad |x| \neq 0 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\frac{1}{-M}} \quad \text{i} \quad x \neq 0 \Leftrightarrow 0 < |x - 0| < \frac{1}{\sqrt{-M}},$$

więc wystarczy przyjąć, że $\delta = \frac{1}{\sqrt{-M}}$.

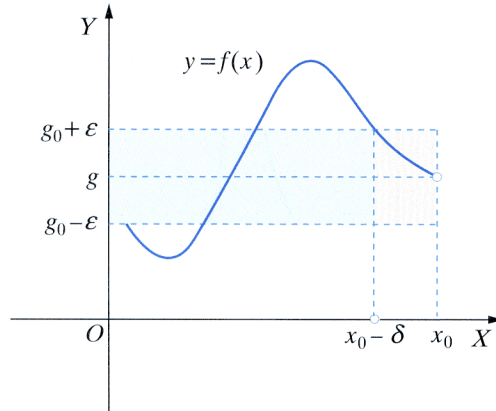
Omawiane dotąd granice funkcji w punkcie: właściwe (będące liczbą) bądź niewłaściwe ($-\infty$ lub $+\infty$) były granicami obustronnymi. Modyfikując nieco ich definicje, można otrzymać określenie tak zwanych granic jednostronnych funkcji w punkcie. Załóżmy więc, że f jest funkcją określoną w pewnym sąsiedztwie lewostronnym S^- punktu x_0 . Mamy definicję:

Liczbę g nazwiemy **granica lewostronna** funkcji f w punkcie x_0 , gdy dla każdego ciągu (x_n) liczb z sąsiedztwa S^- , zbieżnego do x_0 , ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do g .

W zapisie symbolicznym: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = g$.

Inaczej mówiąc:

Liczba g jest **granica lewostronną** funkcji f w punkcie x_0 , gdy dla argumentów x dostatecznie bliskich x_0 i mniejszych od x_0 wartości $f(x)$ są dowolnie bliskie g , co widzimy na rycinie 4.15.



Ryc. 4.15.

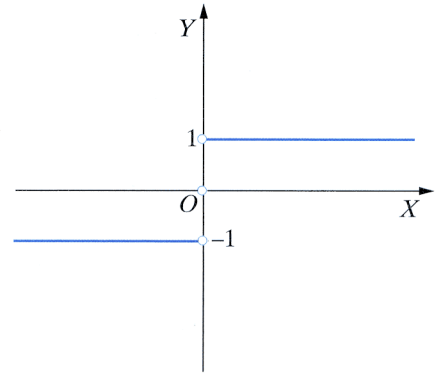
Zapis symboliczny:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = g \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in S^-} \left[-\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon \right].$$

Przykład 8. Oblicz $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$.

Rozwiązanie:

Funkcja $f(x) = \frac{|x|}{x}$ jest określona dla każdego $x \neq 0$, a więc w dowolnym sąsiedztwie lewostronnym punktu 0. Zatem dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do zera, o wyrazach mniejszych od zera, ciąg $(f(x_n))$, czyli ciąg $\left(\frac{|x_n|}{x_n}\right)$, jest ciągiem stale równym -1 , więc zbieżnym do -1 . Stąd $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ (ryc. 4.16).



Ryc. 4.16.

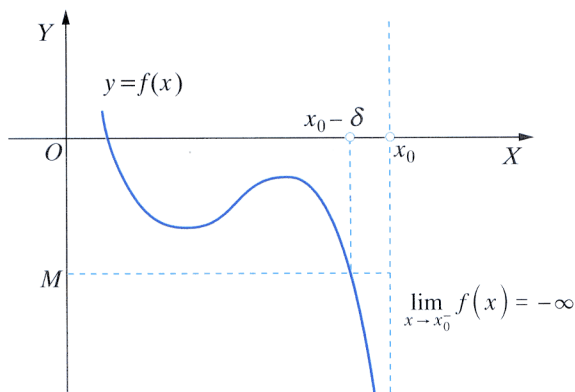
Funkcja f ma w punkcie x_0 **lewostronną granicę niewłaściwą** $-\infty$ (lub $+\infty$), gdy dla każdego ciągu (x_n) liczb z sąsiedztwa S^- i zbieżnego do x_0 , ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny do $-\infty$ (lub $+\infty$).

Zapis symboliczny jest następujący: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$).

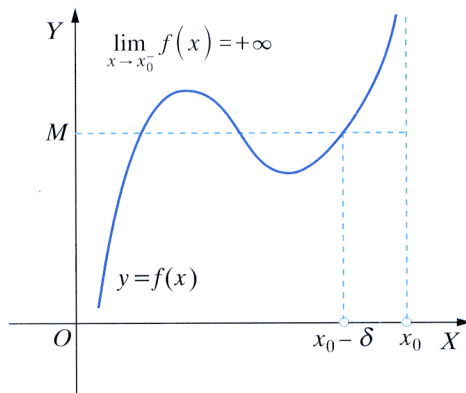
Podaną definicję lewostronnej granicy niewłaściwej (zwaną definicją Heinego) można też równoważnie sformułować jako tak zwaną definicję Cauchy'ego:

Funkcja f ma w punkcie x_0 **lewostronną granicę niewłaściwą** $-\infty$ (lub $+\infty$), gdy dla każdej liczby $M < 0$ ($M > 0$) istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla wszystkich x spełniających warunek $-\delta < x - x_0 < 0$ zachodzi nierówność $f(x) < M$ ($f(x) > M$).

Geometryczną interpretację tej definicji widzimy na rycinach 4.17 i 4.18.



Ryc. 4.17.



Ryc. 4.18.

W zapisie symbolicznym:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \bigwedge_{M < 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in S^-} [-\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) < M] \text{ oraz:}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \bigwedge_{M > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in S^-} [-\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) > M].$$

Podobnie definiuje się **granice prawostronne** właściwe i niewłaściwe funkcji w punkcie. Granicę prawostronną funkcji f w punkcie x_0 oznaczamy symbolem: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Z przytoczonych wyżej definicji wynika, że jeżeli funkcja f jest określona w pewnym sąsiedztwie punktu x_0 i ma w tym punkcie granice jednostronne: prawostronną i lewostronną oraz granice te są równe g , to funkcja f ma w punkcie x_0 granicę równą g .

Pytania i zadania

- Podaj definicję granicy funkcji w punkcie:
 - Heinego;
 - Cauchy'ego.
- Co oznacza geometrycznie istnienie granicy funkcji w punkcie?
- Podaj definicję Heinego i definicję Cauchy'ego granic jednostronnych:

a) $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = g$;	b) $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$;	c) $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$;
d) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = g$;	e) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$;	f) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$.
- Do każdej z granic z zadania 3. podaj interpretację geometryczną.

5. Korzystając z definicji Heinego, oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2};$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1};$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1};$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x}};$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4};$

f) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^2 - 4}.$

6. Oblicz granice jednostronne:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x - 1|}{x - 1};$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x - 1|}{x - 1};$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| + x}{2x};$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| + x}{2x};$

e) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{\sqrt{x - 2}};$

f) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{\sqrt{x - 2}}.$

7. Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} [x];$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} [x];$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} [x - 2];$

d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \left[\frac{x}{3} \right];$

e) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left[\frac{x}{3} \right];$

f) $\lim_{x \rightarrow -2^+} [x + 2].$

Uwaga: $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

8. Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{1}{x^2 - 9};$

b) $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1}{x^2 - 9};$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2 - 9};$

d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x^2 - 9};$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6};$

f) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x - 1}}{x - 1};$

g) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x - 1}}{x - 1};$

h) $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x + 3}{x^2 - x - 12};$

i) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + 3}{x^2 - x - 12}.$

2. Granica funkcji w nieskończoności

Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $(a; +\infty)$, gdzie a jest pewną liczbą rzeczywistą. Poznajmy definicję Heinego, dotyczące granicy funkcji w nieskończoności. Oto pierwsza z tych definicji:



Funkcja f ma w $+\infty$ **granice** g , co zapisujemy: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g$, gdy dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach z przedziału $(a; +\infty)$, rozbitego do $+\infty$, ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do g .

Na przykład $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6} = 2$, gdyż funkcja $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6}$ jest określona w przedziale $(3; +\infty)$ a także dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach z tego przedziału, rozbitego

do $+\infty$, ciąg $(f(x_n))$ określony wzorem: $f(x_n) = \frac{2x_n^2 + 1}{x_n^2 - 5x_n + 6} = \frac{2 + \frac{1}{x_n^2}}{1 - 5 \cdot \frac{1}{x_n} + 6 \cdot \frac{1}{x_n^2}}$ jest

zbieżny do 2.

Kolejne definicje Heinego charakteryzują granice niewłaściwe w nieskończoności.

Funkcja f ma w $+\infty$ **granice niewłaściwą** $-\infty$, co zapisujemy: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, gdy dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach z przedziału $(a; +\infty)$, rozbitego do $+\infty$, ciąg $(f(x_n))$ jest rozbitego do $-\infty$.

Przykładowo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+x^2}{4-x} = -\infty$, gdyż funkcja $f(x) = \frac{2+x^2}{4-x}$ jest określona w przedziale $(4; +\infty)$, a ponadto dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach z tego przedziału, rozbitego

do $+\infty$, ciąg $(f(x_n))$ określony wzorem $f(x_n) = \frac{2 \cdot \frac{1}{x_n^2} + 1}{4 \cdot \frac{1}{x_n} - 1} \cdot x_n$ jest rozbitego do $-\infty$.

Funkcja f ma w $+\infty$ **granice niewłaściwą** $+\infty$, co zapisujemy: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, gdy dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach z przedziału $(a; +\infty)$, rozbitego do $+\infty$, ciąg $(f(x_n))$ jest rozbitego do $+\infty$.

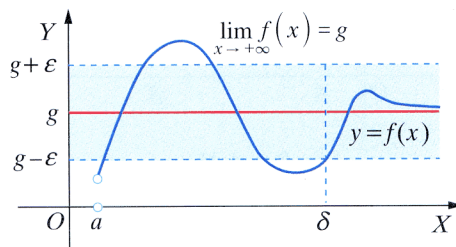
Na przykład $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2-4} = +\infty$, gdyż funkcja $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$ jest określona w przedziale $(2; +\infty)$, a także dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach z tego przedziału, rozbitego do $+\infty$,

ciąg $(f(x_n))$ określony wzorem $f(x_n) = \frac{x_n^3}{x_n^2-4} = \frac{1}{1-4 \cdot \frac{1}{x_n^2}} \cdot x_n$ jest rozbitego do $+\infty$.

Podane definicje Heinego granicy funkcji w $+\infty$ są równoważne odpowiednim definicjom Cauchy'ego. Podamy je wraz z ich ilustracjami geometrycznymi.

Funkcja f ma w $+\infty$ **granice** g , gdy dla **dostatecznie dużych** argumentów x wartości $f(x)$ są **dowolnie bliskie** g , czyli inaczej mówiąc, gdy dla każdej liczby dodatniej ε można znaleźć taką liczbę rzeczywistą δ , by dla wszystkich x z przedziału $(a; +\infty)$ z warunku, że $x > \delta$, wynikała nierówność $|f(x) - g| < \varepsilon$.

Interpretację geometryczną definicji granicy g w nieskończoności przedstawia rycina 4.19.



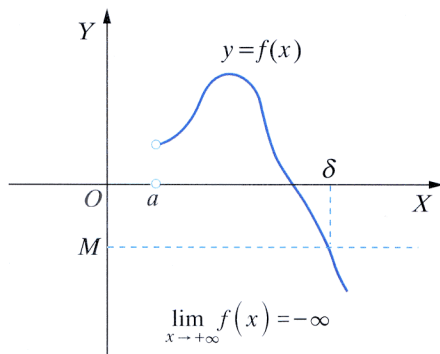
Ryc. 4.19.

Symbolicznie zapisujemy to następująco:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{x > a} [x > \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon].$$

Funkcja f ma w $+\infty$ **granice niewłaściwą** $-\infty$, gdy dla **dostatecznie dużych** argumentów x wartości $f(x)$ są **dowolnie małe**, czyli gdy dla każdej liczby $M < 0$ znajdziemy taką liczbę rzeczywistą δ , że dla wszystkich x z przedziału $(a; +\infty)$, z warunku, że $x > \delta$, wynika nierówność $f(x) < M$.

Geometryczną ilustrację treści tej definicji przedstawia rycina 4.20.



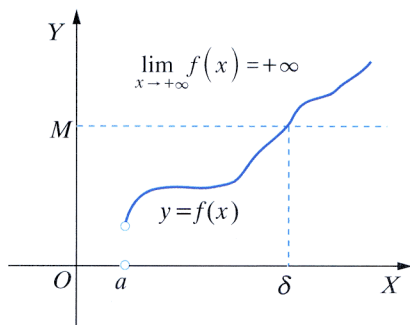
Ryc. 4.20.

Symboliczny zapis definicji:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \bigwedge_{M < 0} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{x > a} [x > \delta \Rightarrow f(x) < M].$$

Funkcja f ma w $+\infty$ **granice niewłaściwą** $+\infty$, gdy dla **dostatecznie dużych** argumentów x wartości $f(x)$ są **dowolnie duże**, czyli inaczej mówiąc, gdy dla każdej dodatniej liczby M znajdziemy taką liczbę rzeczywistą δ , że dla wszystkich x z przedziału $(a; +\infty)$, wówczas z warunku, że $x > \delta$, wynika nierówność $f(x) > M$.

Definicję tę przedstawiono geometrycznie na rycinie 4.21.



Ryc. 4.21.

Oto symboliczny zapis tej definicji:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \bigwedge_{M > 0} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{x > a} [x > \delta \Rightarrow f(x) > M].$$

Założmy teraz, że f jest funkcją określoną w przedziale $(-\infty; a)$, gdzie a jest ustaloną liczbą.

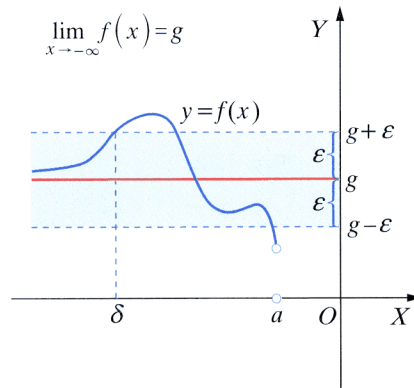
Funkcja f ma w $-\infty$ **granice** g , co zapisujemy: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g$, gdy dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach z przedziału $(-\infty; a)$, rozbieżnego do $-\infty$, ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do g .

Na przykład $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x+x^2}{1-x^2} = -1$, gdyż funkcja $f(x) = \frac{1-x+x^2}{1-x^2}$ jest określona w przedziale $(-\infty; -1)$, a ponadto dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach z tego przedziału, rozbieżnego do $-\infty$, ciąg $(f(x_n))$ określony wzorem $f(x_n) = \frac{1-x_n+x_n^2}{1-x_n^2} = \frac{\frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_n} + 1}{\frac{1}{x_n^2} - 1}$ jest zbieżny do -1 .

Definicję tę możemy również sformułować w następujący sposób:

Funkcja f ma w $-\infty$ **granice** g , gdy dla **dostatecznie małych** argumentów x wartości $f(x)$ są **dowolnie bliskie** g (dowolnie mało różnią się od g), czyli, gdy dla każdej liczby dodatniej ε można znaleźć taką liczbę rzeczywistą δ , by dla wszystkich x z przedziału $(-\infty; a)$, z warunku, że $x < \delta$, wynikała nierówność $|f(x) - g| < \varepsilon$.

Geometryczną ilustrację definicji przedstawia rycina 4.22.



Ryc. 4.22.

Symbolicznie zapisujemy to następująco:

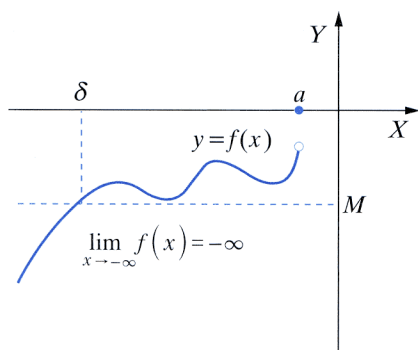
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{x < a} [x < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon].$$

Funkcja f ma w $-\infty$ **granice niewłaściwą** $-\infty$, co zapisujemy: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, gdy dla dowolnego ciągu (x_n) liczb z przedziału $(-\infty; a)$, rozbieżnego do $-\infty$, ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny do $-\infty$.

Przykładowo $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3+x^2}{2+x} = -\infty$, gdyż funkcja $f(x) = \frac{3+x^2}{2+x}$ jest określona w przedziale $(-\infty; -2)$, a ponadto dla dowolnego ciągu (x_n) o wyrazach z przedziału $(-\infty; -2)$, rozbieżnego do $-\infty$, ciąg $(f(x_n))$ zadany wzorem $f(x_n) = \frac{3+x_n^2}{2+x_n} = \frac{3 \cdot \frac{1}{x_n^2} + 1}{2 \cdot \frac{1}{x_n} + 1} \cdot x_n$ jest rozbieżny do $-\infty$.

Oto równoważne sformułowanie tej definicji i jej interpretacja geometryczna (ryc. 4.23):

! Funkcja f ma w $-\infty$ **granicę niewłaściwą** $-\infty$, gdy dla **dostatecznie małych** argumentów x wartości $f(x)$ są **dowolnie małe**, czyli gdy dla każdej liczby $M < 0$ można znaleźć taką liczbę rzeczywistą δ , by dla wszystkich x z przedziału $(-\infty; a)$ z nierówności $x < \delta$ wynikała nierówność $f(x) < M$ (ryc. 4.23).



Ryc. 4.23.

Symbolicznie zapiszemy tę definicję tak:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \bigwedge_{M < 0} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{x < a} [x < \delta \Rightarrow f(x) < M].$$

! Funkcja f ma w $-\infty$ **granicę niewłaściwą** $+\infty$, co zapisujemy: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, gdy dla dowolnego ciągu (x_n) o wyrazach z przedziału $(-\infty; a)$, rozbieżnego do $-\infty$, ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny do $+\infty$.

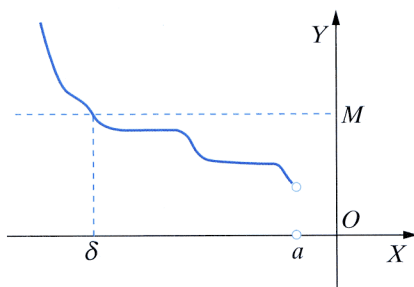
Na przykład $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4-x^2}{2+x} = +\infty$, ponieważ funkcja $f(x) = \frac{4-x^2}{2+x}$ jest określona w przedziale $(-\infty; -2)$, a także dla dowolnego ciągu (x_n) liczb z tego przedziału, rozbieżnego do $-\infty$, ciąg $(f(x_n))$, którego n -ty wyraz $f(x_n) = \frac{4-x_n^2}{2+x_n} = 2 - x_n$, jest rozbieżny do $+\infty$.

Definicję tę można sformułować równoważnie:

Funkcja f , ma w $-\infty$ **granice niewłaściwą** $+\infty$, gdy dla **dostatecznie małych** argumentów x wartości $f(x)$ są **dowolnie duże**, czyli gdy dla każdej liczby $M > 0$ można znaleźć taką liczbę rzeczywistą δ , że dla wszystkich x z przedziału $(-\infty; a)$, spełniających nierówność $x < \delta$, zachodzi nierówność $f(x) > M$.



Interpretację geometryczną definicji prezentuje rycina 4.24.



Ryc. 4.24.

W zapisie symbolicznym przedstawia się to następująco:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \bigwedge_{M > 0} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{x < a} [x < \delta \Rightarrow f(x) > M].$$

Pytania i zadania



1. Podaj definicje Heinego: granicy właściwej i granic niewłaściwych w $-\infty$ i w $+\infty$.
2. Podaj definicje Cauchy'ego: granicy właściwej i granic niewłaściwych w $-\infty$ i w $+\infty$. Zinterpretuj je geometrycznie.
3. Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x}$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+1}{x-1}$;

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2-1}$; e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-2x}{x^2+2x+4}$; f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x^2}{1+x}$.

4. Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^2+4}$;

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+3x^2-1}{1-x^3}$; e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-2}{2x^3}$; f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2-x+2}$.

5. Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x+1}$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2+x+3}{x^2-3x+1}$; c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2-2x+1}{\sqrt{x^4+x}}$;

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^4 - 5x - \frac{1}{x}\right)$; e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{1-x} - \frac{4}{x-1} + \frac{1}{x^2}\right)$; f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x+1} - 2\right)$.

3. Działania arytmetyczne na granicach funkcji

Funkcje, można dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić. W wyniku tych czterech działań arytmetycznych na funkcjach, które w danym punkcie mają granice właściwe, otrzymujemy funkcje mające w tym punkcie granice właściwe. Dokładnie ujmuje to następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g , określone w pewnym sąsiedztwie S danego punktu x_0 , mają w tym punkcie granice odpowiednio A i B , to w punkcie tym mają granice także funkcje: $f + g$, $f - g$ i $f \cdot g$ oraz zachodzą równości:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = A + B,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = A - B,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B.$$

Ponadto, jeśli $B \neq 0$, to w punkcie x_0 istnieje również granica funkcji $\frac{f}{g}$ i zachodzi równość:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

□ Dowód. Wystarczy powołać się na definicję granicy funkcji Heinego i twierdzenie o działaniach arytmetycznych na ciągach zbieżnych. Rzeczywiście, istnienie granic A i B odpowiednio funkcji f i g w punkcie x_0 oznacza, na mocy wspomnianej definicji, zbieżność ciągów $(f(x_n))$ i $(g(x_n))$ odpowiednio do A i B , odpowiadających dowolnemu ciągowi (x_n) liczb z sąsiedztwa S punktu x_0 i zbieżnemu do tego punktu. Stąd zaś i z twierdzenia o działaniach arytmetycznych na ciągach zbieżnych wynika zbieżność ciągów: $(f(x_n) + g(x_n))$, $(f(x_n) - g(x_n))$ i $(f(x_n) \cdot g(x_n))$ odpowiednio do granic: $A + B$, $A - B$ i $A \cdot B$ oraz zbieżność ciągu $\left(\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right)$ do granicy $\frac{A}{B}$, gdy $B \neq 0$. Zatem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = A + B,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - g(x_n)) = A - B,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) \cdot g(x_n)) = A \cdot B, \text{ oraz, gdy } B \neq 0:$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{A}{B}. \quad \square$$

Udowodnione twierdzenie łatwo zapamiętać w postaci skróconej:

Granica sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu dwóch funkcji równa jest odpowiednio: sumie, różnicy, iloczynowi i ilorazowi granic tych funkcji, gdy granice te istnieją i granica dzielnika jest różna od zera.

Można to prześledzić na następujących przykładach:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} (x + \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = 1 + 1 = 2;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -8} \left(\frac{x}{4} - \sqrt[3]{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{x}{4} - \lim_{x \rightarrow -8} \sqrt[3]{x} = -2 - (-2) = 0;$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x} - 1) = 2 \cdot (2 - 1) = 2;$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 4)}{\lim_{x \rightarrow -1} (x + 2)} = \frac{(-1)^2 - 4}{-1 + 2} = -3.$$

Uwaga. Podobne twierdzenie można sformułować dla granic jednostronnych oraz dla granic funkcji w $-\infty$ i $+\infty$. Ale wówczas przez sąsiedztwo S , w którym określone są funkcje f i g , należy rozumieć odpowiednio:

- sąsiedztwo lewostronne, gdy twierdzenie dotyczy granic lewostronnych;
- sąsiedztwo prawostronne, jeśli twierdzenie formułujemy dla granic prawostronnych;
- przedział nieskończony $(-\infty; a)$ lub $(a; +\infty)$, gdzie a jest pewną liczbą, gdy twierdzenie dotyczy granic funkcji w $-\infty$ lub w $+\infty$.

Oto odpowiednie przykłady:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} + x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 + 0 = 0;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1^-} (\sqrt{1-x} - x^2) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} - \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 0 - 1 = -1;$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2x - \frac{|x|}{x} \right) = 0 - (-1) = 1;$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1^+} |x - 1| \cdot [x + 1] = 0 \cdot 2 = 0;$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 0 \cdot 1 = 0;$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Pytania i zadania

1. Podaj twierdzenie o działaniach arytmetycznych na granicach funkcji w punkcie.
2. Sformułuj twierdzenie o działaniach arytmetycznych na granicach:
 - a) lewostronnych funkcji w punkcie,
 - b) prawostronnych funkcji w punkcie,
 - c) funkcji w $-\infty$,
 - d) funkcji w $+\infty$.



3. Oblicz granice:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-1}{x} + x^2 \right); \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 8} \left(\sqrt[3]{4x-5} - \frac{x}{2} \right); \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 1) \left(1 + \frac{1}{x} \right);$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 1}{1 - x}; \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1 + \sqrt{1-x}}; \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow p} (ax^2 + bx + c).$$

4. Oblicz granice:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{4-x^2}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{9-x^2}}{x+1};$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 4} \left[\frac{x}{4} \right]; \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow 4^+} \left[\frac{x}{4} \right]; \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-3}{x^2+x-12};$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{x^2+x-12}; \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}; \quad \text{i) } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}.$$

5. Oblicz granice:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x+1}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x^2+1};$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{4x^2-x+1}}; \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-5}{\sqrt{4x^2+x-1}}; \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$

6*. Powołując się na definicję Heinego granicy funkcji i odpowiednie twierdzenie dotyczące ciągów zbieżnych, wykaż, że jeżeli $a > 0$, to:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a};$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} \text{ dla } n \in \mathbb{N}_+.$$

7. Udowodnij podane twierdzenia o działaniach na granicach niewłaściwych funkcji:

$$\text{a) } \text{jeśli } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ i } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty, \text{ to } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty;$$

$$\text{b) } \text{jeżeli } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \text{ i } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty, \text{ to } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = -\infty;$$

$$\text{c) } \text{jeżeli } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ i } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty, \text{ to } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = +\infty;$$

$$\text{d) } \text{jeżeli } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ i } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty, \text{ to } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = -\infty;$$

$$\text{e) } \text{jeżeli } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \text{ i } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty, \text{ to } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = +\infty.$$

8. Sformułuj i udowodnij twierdzenia analogiczne do podanych w zadaniu 7., dotyczące granic niewłaściwych $+\infty$ i $-\infty$ funkcji w $+\infty$ oraz w $-\infty$.

9. Rozstrzygnij, czy podane twierdzenia są prawdziwe:

Jeżeli $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, to:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = 0; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = +\infty;$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = -\infty; \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

10. Rozstrzygnij, czy podane twierdzenia są prawdziwe:

Jeśli $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, to:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = +\infty$;

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = -\infty$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

11. Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 2x^2)$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 + x^3 + 3x)$; c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$;

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x)$; e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)(-x^3 + 2x)$; f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x\sqrt{x^2 + x + 1}$.

4. Obliczanie granic

Rozpatrzmy kolejne przykłady dotyczące obliczania granic funkcji, tym razem nieco trudniejsze. Wcześniej jednak warto poznać kilka granic, które okażą się przydatne.

Łatwo udowodnić, że $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ i $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ dla każdego $x_0 \in \mathbf{R}$.

Wiemy także, że $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$, gdy $x_0 \geq 0$, $n \in \mathbf{N}_+$.

Wykażemy teraz kilka twierdzeń.

Twierdzenie 1.

Dla każdego $x_0 \in \mathbf{R}$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ oraz $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$.

□ Dowód. Udowodnimy tylko pierwszą równość, gdyż dowód drugiej przebiega analogicznie.

Ponieważ $\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}$, a ponadto $\left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq \left| \frac{x - x_0}{2} \right| = \frac{|x - x_0|}{2}$

oraz $\left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 1$, więc $|\sin x - \sin x_0| = 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 2 \cdot \frac{|x - x_0|}{2} \cdot 1 = |x - x_0|$. Zatem $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$, gdy $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, gdzie $\delta_\varepsilon = \varepsilon$. □

Twierdzenie 2.

Dla każdego $x_0 \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbf{C}$, zachodzi wzór:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0.$$

□ Dowód. Ponieważ dla każdego $x_0 \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbf{C}$, zachodzą równości:

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ i $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$ oraz $\cos x_0 \neq 0$, więc z twierdzenia o działaniach arytmetycznych na granicach funkcji wynika, że $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = \operatorname{tg} x_0$. □

Twierdzenie 3.

Dla każdego $x_0 \neq k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$, zachodzi wzór:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0.$$

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia 2.

Twierdzenie 4.

Dla $x_0 = 0$ zachodzi wzór:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

□ Dowód. Funkcja $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ jest określona dla każdego $x \neq 0$, a zatem w każdym sąsiedztwie punktu 0. Rozpatrujemy ją więc w sąsiedztwie tego punktu o promieniu $\frac{\pi}{2}$. Dla x z tego sąsiedztwa, czyli takich x , że $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, zachodzą nierówności:

$$(*) \sin |x| < |x| < \operatorname{tg} |x|.$$

Istotnie, wystarczy rozważyć okrąg o środku w początku układu XOY i o promieniu 1 oraz kąt środkowy o miarze łukowej $|x|$ (ryc. 4.25). Wtedy zauważymy, że nierówności $(*)$ wynikają stąd, iż odcinek \overline{AB} o długości $\sin |x|$ jest krótszy od łuku \widehat{AD} o długości $|x|$, ten zaś jest krótszy od odcinka \overline{CD} o długości $\operatorname{tg} |x|$.

Nierówności $(*)$ są równoważne kolejno nierównościom:

$$\sin |x| < |x| < \frac{\sin |x|}{\cos |x|},$$

$$1 < \frac{|x|}{\sin |x|} < \frac{1}{\cos |x|},$$

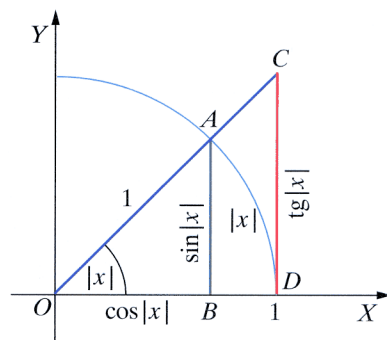
$$\cos |x| < \frac{\sin |x|}{|x|} < 1,$$

i ostatecznie nierównościami:

$$(**) \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \text{ gdyż dla } 0 < |x| < \frac{\pi}{2} \text{ zachodzą równości: } \cos |x| = \cos x \text{ oraz } \frac{\sin |x|}{|x|} = \frac{\sin x}{x}.$$

Ponieważ $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$ (zob. twierdzenie 1.), więc dla dowolnego ciągu (x_n) o wyrazach z sąsiedztwa 0 i o promieniu $\frac{\pi}{2}$, zbieżnego do 0, ciąg $(\cos x_n)$ jest zbieżny do 1. Stąd oraz z nierówności $(**)$ i z twierdzenia o trzech ciągach wynika zbieżność ciągu $\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)$ do 1.

To zaś, na mocy definicji Heinego granicy, oznacza ostatecznie, że $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. □



Ryc. 4.25.

Przejdźmy teraz do zapowiadanych przykładów.

Przykład 1. Oblicz $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ dla każdego $x \neq 1$:

$$\frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(2x+1)(x-1)} = \frac{x+1}{2x+1}, \text{ więc:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{1+1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{2}{3}.$$

Odpowiedź: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{2}{3}$.

Przykład 2. Oblicz $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$.

Rozwiązanie:

$$\text{Gdy } x \geq -1 \text{ i } x \neq 0, \text{ to } \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1}.$$

$$\text{Zatem: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{\sqrt{0+1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Odpowiedź: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \frac{1}{2}$.

Przykład 3. Oblicz $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, otrzymujemy dla $x \neq 1$:

$$\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{(\sqrt[3]{x})^3 - 1^3} = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} = \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1}. \text{ Zatem:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{1}{1^2 + 1 + 1} = \frac{1}{3}.$$

Odpowiedź: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{3}$.

Przykład 4. Oblicz $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}$.

Rozwiązanie:

Dla $x \neq 0$:

$$\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x} = \frac{1 + 6x + 11x^2 + 6x^3 - 1}{x} = \frac{6x + 11x^2 + 6x^3}{x} = 6 + 11x + 6x^2.$$

Stąd $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (6 + 11x + 6x^2) = 6 + 11 \cdot 0 + 6 \cdot 0^2 = 6$.

Odpowiedź: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x} = 6$.

Przykład 5. Oblicz $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ dla każdego $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3} &= \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 4} + 2}{\sqrt{x^2 + 4} + 2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 9} + 3}{\sqrt{x^2 + 9} + 3} = \\ &= \frac{(\sqrt{x^2 + 4})^2 - 4}{(\sqrt{x^2 + 9})^2 - 9} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 9} + 3}{\sqrt{x^2 + 4} + 2} = \frac{x^2 + 4 - 4}{x^2 + 9 - 9} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 9} + 3}{\sqrt{x^2 + 4} + 2} = \frac{\sqrt{x^2 + 9} + 3}{\sqrt{x^2 + 4} + 2}, \text{ więc:} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} + 3}{\sqrt{x^2 + 4} + 2} = \frac{3 + 3}{2 + 2} = \frac{3}{2}.$$

Odpowiedź: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3} = \frac{3}{2}$.

Przykład 6. Oblicz $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 5}{x^2 + 3x + 1}$.

Rozwiązanie:

Postępujemy jak przy obliczaniu granicy ciągu nieskończonego, wyłączając w liczniku i mianowniku tego ułamka przed nawias zmienną w najwyższej potędze. Stąd otrzymujemy:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 5}{x^2 + 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(2 + \frac{1}{x} - 5 \cdot \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + 3 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x} - 5 \cdot \frac{1}{x^2}}{1 + 3 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{2 + 0 - 5 \cdot 0}{1 + 3 \cdot 0 + 0} = 2.$$

Odpowiedź: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 5}{x^2 + 3x + 1} = 2$.

Przykład 7. Oblicz $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{\sqrt{x^4 + x^2}}$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{\sqrt{x^4 + x^2}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(3 - 4 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{\sqrt{x^4 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(3 - 4 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 4 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{3 - 4 \cdot 0 + 0}{\sqrt{1 + 0}} = 3. \end{aligned}$$

Odpowiedź: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{\sqrt{x^4 + x^2}} = 3$.

Przykład 8*. Oblicz $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x})$.

Rozwiązanie:

Funkcja $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}$ jest określona w przedziałach $(-\infty; -2)$ i $(2; +\infty)$.

Ponadto:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x} &= \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x})(\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x})}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x}} = \\ &= \frac{(\sqrt{x^2 + 2x})^2 - (\sqrt{x^2 - 2x})^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{(x^2 + 2x) - (x^2 - 2x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x}} = \\ &= \frac{4x}{\sqrt{x^2(1 + 2 \cdot \frac{1}{x})} + \sqrt{x^2(1 - 2 \cdot \frac{1}{x})}} = \frac{4x}{|x| \left(\sqrt{1 + 2 \cdot \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - 2 \cdot \frac{1}{x}} \right)} = \\ &= \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{1 + 2 \cdot \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - 2 \cdot \frac{1}{x}}}, & \text{gdy } x > 2 \\ -\frac{4}{\sqrt{1 + 2 \cdot \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - 2 \cdot \frac{1}{x}}}, & \text{gdy } x < -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Możemy teraz obliczyć granicę w $+\infty$ i $-\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{1 + 2 \cdot \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - 2 \cdot \frac{1}{x}}} = \\ &= \frac{4}{\sqrt{1 + 2 \cdot 0} + \sqrt{1 - 2 \cdot 0}} = \frac{4}{2} = 2, \text{ zaś:} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{4}{\sqrt{1 + 2 \cdot \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - 2 \cdot \frac{1}{x}}} \right) = -\frac{4}{2} = -2.$$

Odpowiedź: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}) = -2$.

Przykład 9. Oblicz $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$ dla każdego $x \neq 0$, a ponadto $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ i $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, więc:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

Przykład 10. Oblicz $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Rozwiązanie:

Sposób pierwszy. Dla każdego $x \neq 0$ mamy:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \\ &= \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x}. \end{aligned}$$

Stąd możemy obliczyć:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1^2 \cdot \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Sposób drugi. Ponieważ $\cos x = \cos 2 \cdot \frac{x}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, a także, gdy $x \rightarrow 0$, to $\frac{x}{2} \rightarrow 0$.

Wynika z tego, że $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$, więc:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}.$$

Odpowiedź: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Przykład 11. Oblicz $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(x-1)^2}{x-1}$.

Rozwiązanie:

Niech $y = x - 1$. Ponieważ $y \rightarrow 0$, gdy $x \rightarrow 1$, zatem:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(x-1)^2}{x-1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} y^2}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} y^2}{y^2} \cdot y = 1 \cdot 0 = 0.$$

Odpowiedź: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(x-1)^2}{x-1} = 0$.

Przykład 12*. Oblicz $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x^2 - 1}$.

Rozwiązanie:

Niech $y = x - 1$. Wówczas $x = y + 1$ oraz $y \rightarrow 0$, gdy $x \rightarrow 1$. Zatem:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \pi(y+1)}{y} \cdot \frac{1}{y+2} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin \pi y}{\pi y} \cdot \frac{\pi}{y+2} \right) = -1 \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x^2 - 1} = -\frac{\pi}{2}$.



Pytania i zadania

1. Oblicz granice:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{x}};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 5x + 6}.$$

2. Oblicz granice:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{1 - \sqrt{2 - x}};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{27 + x^3}{x + 3};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^5 - 1};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x + 1};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{x - 1}.$$

3. Oblicz granice:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+13}}{x^2 - 9};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{2 - \sqrt[3]{x}};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1 - \sqrt{1 - 2x - x^2}}{x};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 + 2x}}{x}.$$

4. Oblicz granice:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin x};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} 2x};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x};$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 6x};$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}.$$

5. Oblicz granice:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x});$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1});$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x^2 + 1});$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x);$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x - 2x^2};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2x - 4x^2}{1 - x + 2x^2};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}{2x + 1};$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{3x(x^2 - 4)};$$

$$i) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 1}}{x};$$

$$j) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 1}}{x};$$

$$k) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}x(\sqrt{4x^2 + 1} + 2x);$$

$$l) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x(\sqrt{x^2 + 1} - x).$$

6*. Oblicz granice:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} - x);$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 2x});$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x});$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}});$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}).$$

7**. Oblicz poniższe granice, gdzie m i $n \in \mathbb{N}_+$:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{x - 1};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1};$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[n]{1+x}}{x};$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x}) \dots (1 - \sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}};$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n)} - x \right];$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n}{x^n};$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)^n - \left(\sqrt{1+x^2} - x\right)^n}{x}.$$

8**. Oblicz granice:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx};$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x};$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x};$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1};$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}.$$

5. Ciągłość funkcji w punkcie i w przedziale

Gdy mówiliśmy o granicy funkcji w punkcie, zakładaliśmy, by funkcja była określona w pewnym sąsiedztwie tego punktu. Teraz będziemy rozpatrywać funkcję określoną w pewnym **otoczeniu danego punktu** x_0 , bowiem wartość funkcji w tym punkcie będzie istotna dla pojęcia, którym zajmiemy się obecnie.

Niech f będzie funkcją określoną w pewnym otoczeniu U danego punktu x_0 , to jest w przedziale $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią.

! Funkcję f nazywamy **ciągłą** w punkcie x_0 , gdy ma w tym punkcie granicę równą swej wartości w tym punkcie, czyli gdy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Tak więc funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są jednocześnie dwa warunki:

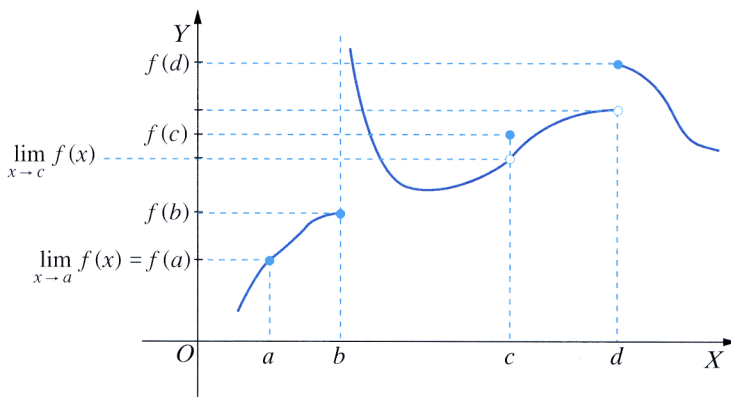
1. ma w punkcie x_0 granicę właściwą g , czyli: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$;

2. $g = f(x_0)$.

Gdy któryś z tych warunków nie jest spełniony, to o funkcji f mówimy, że **nie jest ciągła** (albo że jest **nieciągła**) w punkcie x_0 . Podkreślmy, że nie stawiamy problemu ciągłości funkcji w punkcie nienależącym do dziedziny.

Na przykład funkcja f , której wykres przedstawia rycina 4.26, jest ciągła w punkcie a , nieciągła zaś jest w punktach:

- b (w punkcie tym nie istnieje granica funkcji f),
- c (istnieje $f(c)$ i $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$, ale $f(c) \neq \lim_{x \rightarrow c} f(x)$),
- d (nie istnieje $\lim_{x \rightarrow d} f(x)$).



Ryc. 4.26.

Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji w punkcie, możemy definicję ciągłości wyrazić następująco:

Funkcję f , określoną w pewnym otoczeniu U danego punktu x_0 , nazywamy **ciągłą** w tym punkcie, gdy dla każdego ciągu (x_n) liczb z otoczenia U , zbieżnego do x_0 , ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do $f(x_0)$. !

Na podstawie zaś definicji Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie możemy ciągłość funkcji w punkcie określić w taki sposób:

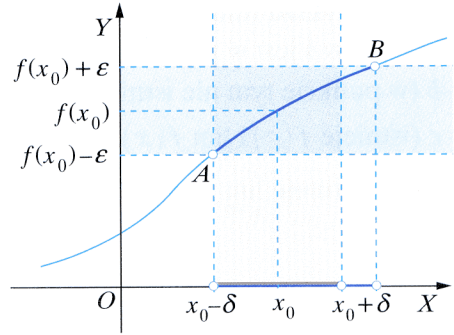
Funkcję f , określoną w pewnym otoczeniu U danego punktu x_0 , nazywamy **ciągłą** w tym punkcie, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ znajdziemy taką liczbę $\delta > 0$, że dla wszystkich x z otoczenia U spełniających nierówność $|x - x_0| < \delta$ zachodzi nierówność $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. !

Oto zapis symboliczny tej definicji:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in U} \left[|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right].$$

Treść definicji przedstawia geometrycznie rycina 4.27 na następnej stronie.

Obieramy na osi OY punkt $f(x_0)$ oraz punkty $f(x_0) - \varepsilon$ i $f(x_0) + \varepsilon$, gdzie ε jest dowolnie małą liczbą dodatnią, i przez dwa ostatnie punkty prowadzimy proste równoległe do osi OX . Jeśli przecinają one wykres funkcji f w takich punktach A i B *, że rzut odcinka AB tego wykresu na oś OX zawiera x_0 wraz z takim jego otoczeniem, iż w jego punktach zachodzi nierówność $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, to liczba $f(x_0)$ jest granicą funkcji f w punkcie x_0 .



Ryc. 4.27.

Inaczej mówiąc, warunek ciągłości funkcji oznacza, że część jej wykresu leżąca w pasie ograniczonym prostymi o równaniach $x = x_0 - \delta$ i $x = x_0 + \delta$ znajduje się w pasie ograniczonym prostymi o równaniach $y = f(x_0) - \varepsilon$ i $y = f(x_0) + \varepsilon$ (na ryc. 4.27 częścią wspólną tych pasów jest najciemniejszy prostokąt).



Funkcję f określoną w pewnym lewostronnym (prawostronnym) sąsiedztwie punktu x_0 nazywamy **lewostronnie (prawostronnie) ciągłą** w punkcie x_0 , gdy ma w tym punkcie granicę lewostronną (prawostronną) równą swej wartości w tym punkcie, a więc gdy:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \right).$$

Na przykład:

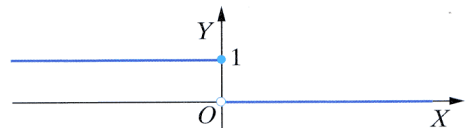
– funkcja f określona wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - |x|}{2x}, & \text{gdy } x \neq 0, \\ 1, & \text{gdy } x = 0 \end{cases} \text{ , której wykres}$$

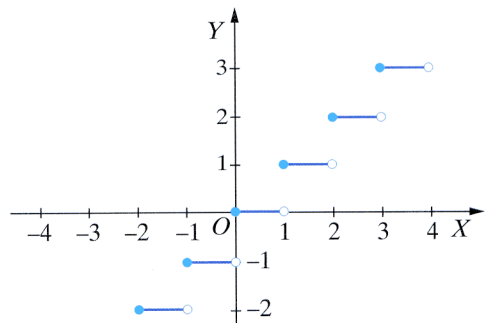
widzimy na rycinie 4.28, jest lewostronnie ciągła w zerze, gdyż $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 = f(0)$;

– funkcja $f(x) = [x]$ jest prawostronnie ciągła w każdym całkowitym punkcie x (ryc. 4.29).

Z definicji ciągłości wynika, że funkcja jest ciągła w danym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy jest w tym punkcie ciągła lewostronnie i prawostronnie.



Ryc. 4.28.



Ryc. 4.29.



Funkcję nazywamy **ciągłą w przedziale otwartym**, gdy jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału.

$$\text{Tak więc } f \text{ jest ciągła w } (a; b) \Leftrightarrow \bigwedge_{x_0 \in (a; b)} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \right).$$

*) Jeśli proste te nie przecinają wykresu funkcji f , to rzutujemy na oś OX tę część wykresu funkcji f , która leży między tymi prostymi.

Funkcję nazywamy **ciągłą w przedziale domkniętym**, gdy jest ciągła w każdym punkcie wewnętrznym tego przedziału, prawostronnie ciągła w lewym krańcu oraz lewostronnie ciągła w prawym krańcu.



Zatem f jest ciągła w $\langle a; b \rangle \Leftrightarrow f$ jest ciągła w $(a; b)$, a ponadto $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$
i $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Pytania i zadania



1. Podaj określenie ciągłości funkcji w punkcie.
2. Wskaż przykład funkcji ciągłej w punkcie $x_0 = -1$ oraz przykład funkcji nieciągłej w tym punkcie.
3. Podaj definicję:
 - a) funkcji ciągłej w przedziale otwartym;
 - b) prawostronnej ciągłości funkcji w punkcie x_0 ;
 - c) lewostronnej ciągłości funkcji w punkcie x_0 ;
 - d) funkcji ciągłej w przedziale domkniętym.
4. Rozstrzygnij, czy funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ -1 & \text{dla } x = 0 \end{cases} \text{ jest ciągła w zerze:}$$

- a) lewostronnie,
 - b) prawostronnie.
- Odpowiedź uzasadnij.
5. Dla jakiej wartości m funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x+1)}{|x+1|} & \text{dla } x \neq -1 \\ m & \text{dla } x = -1 \end{cases} \text{ jest ciągła w punkcie } x_0 = -1:$$

- a) lewostronnie,
 - b) prawostronnie?
6. Dla jakiej wartości a funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & \text{dla } x \neq -1 \\ a & \text{dla } x = -1 \end{cases} \text{ jest ciągła w punkcie } x_0 = -1?$$

- 7*. Udowodnij, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases} \text{ jest ciągła w punkcie } x_0 = 0,$$

gdzie $\left[\frac{1}{x} \right]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od $\frac{1}{x}$.

6. Działania arytmetyczne na funkcjach ciągłych

Z twierdzenia o działaniach arytmetycznych na granicach funkcji wynika, że **suma, różnica oraz iloczyn funkcji ciągłych w danym punkcie jest funkcją ciągłą w tym punkcie**. Ponadto iloraz dwóch funkcji ciągłych w punkcie, jeśli wartość dzielnika jest różna od zera, jest funkcją ciągłą w tym punkcie.

Podobny wniosek można wysnuć o ciągłości sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji ciągłych w przedziale. Funkcja stała $f(x) = c$ oraz funkcja tożsamościowa $g(x) = x$ są oczywiście ciągłe w zbiorze \mathbf{R} wszystkich liczb rzeczywistych, gdyż dla każdego $x_0 \in \mathbf{R}$ mamy:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} c = c = f(x_0) \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 = g(x_0).$$

Stąd wynika, na mocy twierdzenia o działaniach arytmetycznych na funkcjach ciągłych, że:

1. Każdy wielomian $f(x)$ jest funkcją ciągłą w zbiorze \mathbf{R} , gdyż jest on albo funkcją stałą, albo funkcją tożsamościową, albo sumą iloczynów takich funkcji.

Na przykład:

- funkcja $f(x) = 5$ jest ciągła w zbiorze \mathbf{R} ,
- funkcja $f(x) = -3x^2 + x - 2$ jest ciągła w zbiorze \mathbf{R} ,
- funkcja $f(x) = x^3 - 3x + \sqrt{2}$ jest ciągła w zbiorze \mathbf{R} .

2. Każda funkcja wymierna jest funkcją ciągłą w swej dziedzinie, gdyż jako iloraz dwóch wielomianów jest określona w zbiorze tych liczb rzeczywistych, które nie są miejscami zerowymi mianownika.

Na przykład:

- funkcja $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + 2}$ jest ciągła w zbiorze $\mathbf{R} \setminus \{-2\}$,
- funkcja $f(x) = \frac{x + 1}{x^3 - 1}$ jest ciągła w zbiorze $\mathbf{R} \setminus \{1\}$,
- funkcja $f(x) = \frac{3x^2 + x - 1}{x^2 + 1}$ jest ciągła w zbiorze \mathbf{R} .

Z udowodnionych w podrozdziale 4. twierdzeń 1–3 wnosimy, że funkcje trygonometryczne są funkcjami ciągłymi:

- sinus i cosinus – w zbiorze \mathbf{R} ,
- tangens – w zbiorze $\mathbf{R} \setminus \left\{ (2k + 1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbf{C} \right\}$,
- cotangens – w zbiorze $\mathbf{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbf{C}\}$.



Pytania i zadania

1. Podaj twierdzenie o ciągłości:
 - a) sumy,
 - b) różnicy,
 - c) iloczynu,
 - d) ilorazu.

2. Rozstrzygnij, czy funkcjami ciągłymi w podanym punkcie x_0 są funkcje: $f(x) + g(x)$,

$$f(x) - g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ gdy:}$$

a) $f(x) = -3x + 1, g(x) = x^2 - 5x + 2, x_0 = -1$;

b) $f(x) = 2x - 1, g(x) = x^2 - x - 12, x_0 = 1$;

c) $f(x) = x^2 - 3, g(x) = x^2 - 5, x_0 = 5$;

3. Podaj przedziały w których funkcja f jest ciągła:

a) $f(x) = -\sqrt{3}x^4 + 2x^3 - 1$;

b) $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$;

c) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$;

d) $f(x) = \frac{x}{\cos x}$;

e) $f(x) = \sin x - \frac{1}{\cos x}$;

f) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;

g) $f(x) = \frac{2x + 3}{|x - 1|}$;

h) $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{gdy } |x| \geq 1 \\ 2, & \text{gdy } |x| < 1; \end{cases}$

i) $f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x - 1}}$.

7. Badanie ciągłości funkcji

Zajmijmy się badaniem ciągłości funkcji. Posługiwać się przy tym będziemy: definicją ciągłości funkcji w punkcie, twierdzeniem o działaniach arytmetycznych na funkcjach ciągłych, ciągłością znanych funkcji elementarnych oraz wykresem. Przejdźmy zatem od razu do przykładów.

Przykład 1. Zbadaj ciągłość funkcji f określonej następująco:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{gdy } |x| > 1 \\ -1, & \text{gdy } |x| \leq 1. \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Funkcja ta jest, jak widać, określona dla każdego $x \in \mathbf{R}$, przy czym:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < -1 \text{ lub } x > 1 \\ -1 & \text{dla } -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Przyglądając się wykresowi tej funkcji (ryc. 4.30), widzimy, że jest ona ciągła w każdym punkcie $x \neq 1$. W punkcie $x_0 = 1$ nie jest ona ciągła, gdyż jej granica lewostronna w tym punkcie wynosi -1 , a prawostronna 1 . Dana funkcja jest więc w tym punkcie ciągła tylko lewostronnie.

Odpowiedź: Dana funkcja jest ciągła w każdym punkcie $x \neq 1$.

Przykład 2. Zbadaj ciągłość funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{dla } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{dla } 0 < x < 1 \\ x - 1 & \text{dla } x \geq 1. \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Funkcja ta jest określona w całym zbiorze \mathbf{R} liczb rzeczywistych. Jej ciągłość w przedziałach $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ i $(1; +\infty)$ wynika z ciągłości w tych przedziałach odpowiednio funkcji: $y = x^2 + 1$, $y = \frac{1}{x}$ i $y = x - 1$. Pozostaje więc zbadać ciągłość funkcji f w punktach 0 i 1 . Poniżej:

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 1) = 1$, zaś $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, zatem f jest nieciągła w punkcie 0 .
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x} = 1$, zaś $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0$, dlatego funkcja f także nie jest ciągła w punkcie 1 .

Odpowiedź: Dana funkcja jest ciągła w każdym punkcie $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$.

Przykład 3. Wykaż, że funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest ciągła w całym zbiorze \mathbf{R} .

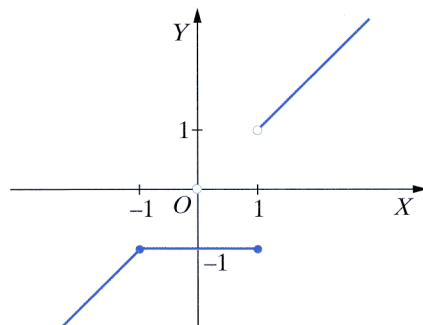
Rozwiązanie:

Gdy $x_0 \neq 0$ i $x \rightarrow x_0$, to $\frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{x_0}$ i $\cos \frac{1}{x} \rightarrow \cos \frac{1}{x_0}$. Zatem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x \cdot \cos \frac{1}{x} = x_0 \cdot \cos \frac{1}{x_0} = f(x_0),$$

co oznacza ciągłość funkcji f w dowolnym punkcie $x_0 \neq 0$.

Niech $x_0 = 0$. Dla dowolnego ciągu (x_n) o wyrazach $x_n \neq 0$ i zbieżnego do 0 jest:

$$0 \leq |f(x_n)| = \left| x_n \cdot \cos \frac{1}{x_n} \right| = |x_n| \cdot \left| \cos \frac{1}{x_n} \right| \leq |x_n| \cdot 1. \text{ Stąd na mocy twierdzenia o trzech ciągłach}$$


Ryc. 4.30.

gach wynika, że $|f(x_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, a zatem również $f(x_n) \rightarrow 0$. To zaś oznacza, na mocy definicji Heinego granicy funkcji, że $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Jednocześnie $f(0) = 0$. Zatem f jest ciągła także w $x_0 = 0$.

Odpowiedź: Funkcja f jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in \mathbf{R}$.

Przykład 4. Wyznacz punkty, w których funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x^2+x-6} & \text{dla } x \neq -3 \text{ i } x \neq 2 \\ -\frac{1}{5} & \text{dla } x = -3 \text{ lub } x = 2 \end{cases}$$

nie jest ciągła.

Rozwiązanie:

Ponieważ $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$, więc $f(x) = \frac{x+3}{(x+3)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$ dla $x \neq -3$

i $x \neq 2$. Zauważmy, że dana funkcja jest ciągła w przedziałach $(-\infty; -3)$, $(-3; 2)$ i $(2; +\infty)$, co wynika z ciągłości odpowiedniej funkcji wymiernej w tych przedziałach. W celu zbadania ciągłości tej funkcji w punktach $x = -3$ i $x = 2$ obliczamy w nich jej granice:

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{5},$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty.$$

Wynika stąd, że funkcja ta jest ciągła w punkcie $x = -3$, gdyż jej granica w tym punkcie równa jest jej wartości w nim, natomiast w punkcie $x = 2$ dana funkcja nie jest ciągła (nie istnieje jej granica w tym punkcie).

Odpowiedź: Jedyńm punktem, w którym dana funkcja nie jest ciągła, jest punkt $x = 2$.

Przykład 5. Dla jakich a i b funkcja $f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{dla } x < -1 \\ x^2+1 & \text{dla } -1 \leq x \leq 1 \\ -ax+2b & \text{dla } x > 1 \end{cases}$ jest ciągła w zbiorze \mathbf{R}

wszystkich liczb rzeczywistych?

Rozwiązanie:

Funkcja ta jest ciągła w przedziałach: $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ i $(1; +\infty)$ dla dowolnych liczb a i b , co wynika z ciągłości odpowiednich funkcji elementarnych w tych przedziałach. Pozostaje zatem wyznaczyć takie a i b , aby funkcja ta była ciągła w punktach $x = -1$ i $x = 1$. Ponieważ:

$$f(-1) = f(1) = 2 \text{ oraz:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (ax+b) = -a+b,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2+1) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-ax + 2b) = -a + 2b,$$

więc dana funkcja będzie ciągła w tych punktach wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą będą równości: $-a + b = 2$ i $-a + 2b = 2$.

Rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ -a + 2b = 2, \end{cases}$$

otrzymujemy: $a = -2$, $b = 0$.

Odpowiedź: Dana funkcja jest ciągła w zbiorze \mathbf{R} dla $a = -2$ i $b = 0$.

Przykład 6*. Dla jakich a funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2} \sin x - 1}{1 - \operatorname{ctg}^2 x}, & \text{gdy } x \neq k\pi \text{ i } x \neq k\pi \pm \frac{\pi}{4}, \text{ gdzie } k \in \mathbf{C} \\ a + 1, & \text{gdy } x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $x_0 = \frac{\pi}{4}$?

Rozwiązanie:

Obliczamy najpierw granicę danej funkcji w tym punkcie. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin x - 1}{1 - \operatorname{ctg}^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sqrt{2} \sin x}{\operatorname{ctg}^2 x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sqrt{2} \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \cdot \sin^2 x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \sqrt{2} \sin x)(1 + \sqrt{2} \sin x)}{\cos 2x} \cdot \frac{\sin^2 x}{1 + \sqrt{2} \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin^2 x}{\cos 2x} \cdot \frac{\sin^2 x}{1 + \sqrt{2} \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1 + \sqrt{2} \sin x} = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{4}}{1 + \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1 + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Zatem dana funkcja będzie ciągła w punkcie $x_0 = \frac{\pi}{4}$, gdy zajdzie równość $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$,

czyli równość $\frac{1}{4} = a + 1$. Stąd $a = -\frac{3}{4}$.

Odpowiedź: Dana funkcja jest ciągła w punkcie $x_0 = \frac{\pi}{4}$ dla $a = -\frac{3}{4}$.



Pytania i zadania

1. W jakich przedziałach funkcja f jest ciągła:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}; \quad \text{b) } f(x) = \frac{2x}{x^2+1}; \quad \text{c) } f(x) = \frac{-2+1}{x-1};$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{gdy } |x| \geq 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{gdy } |x| < 1; \end{cases} \quad \text{e) } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } |x| < 2 \\ \frac{4}{|x|}, & \text{gdy } |x| \geq 2? \end{cases}$$

2. Zbadaj ciągłość funkcji:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \leq 0 \\ \frac{x}{x-1} & \text{dla } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{dla } x \geq 1; \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x^2 & \text{dla } 1 < x \leq 2; \end{cases}$$

$$\text{c*) } f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & \text{gdym } |x| \leq 1 \\ |x-1|, & \text{gdym } |x| > 1; \end{cases} \quad \text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2-9}, & \text{gdym } x < 0 \text{ i } x \neq -3 \\ \frac{x}{x^2+1}, & \text{gdym } x \geq 0 \text{ i } x \neq 3. \end{cases}$$

3. Dla jakich a funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & \text{gdym } x \geq -1 \text{ i } x \neq 0 \\ a, & \text{gdym } x = 0 \end{cases}$ jest ciągła

w przedziale $\langle -1; +\infty \rangle$?

4*. Dla jakich a funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}} & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{C} \\ 3+a & \text{dla } x = 1 \end{cases}$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 1$?

5. Dla jakich a funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-\cos 4x}}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ -\sqrt{a} & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ jest lewostronnie ciągła w punkcie $x_0 = 0$?

6. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x & \text{dla } x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ gdzie } k \in \mathbb{C} \\ a+1 & \text{dla } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Wyznacz te wartości a , dla których funkcja ta jest ciągła w punkcie $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

7. Zbadaj ciągłość w punkcie $x_0 = 0$ funkcji:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} |\sin x^2| & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ |x-1| & \text{dla } x < 0; \end{cases} \quad \text{b*) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

8**. Dla jakich a, b, c funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x} & \text{dla } x < 0 \\ \frac{x^3-1}{x^2+x-2} & \text{dla } 0 \leq x < 1 \\ c & \text{dla } x = 1 \\ \frac{x^2+(b-1)x-b}{x-1} & \text{dla } x > 1 \end{cases}$ jest ciągła w zbiorze \mathbb{R} ?

8. Własności funkcji ciągłych

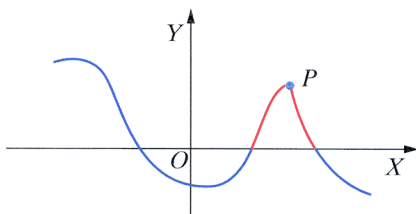
Wiemy, że funkcja ciągła w przedziale (otwartym lub domkniętym) to taka funkcja, która jest ciągła w każdym jego punkcie. O jej wykresie mówimy wówczas, że jest on linią ciągłą (co intuicyjnie oznacza, że nigdzie się nie przerywa).

Poznamy teraz kilka innych własności każdej funkcji ciągłej. Sformułujemy je w postaci twierdzeń.

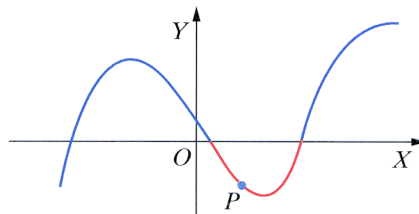
Twierdzenie (o lokalnym zachowaniu znaku)

Jeżeli funkcja f określona w otoczeniu U punktu x_0 jest w tym punkcie ciągła i dodatnia (ujemna), to jest dodatnia (ujemna) także w pewnym otoczeniu $V \subset U$ tego punktu.

Geometrycznie oznacza to, że jeżeli punkt P o odciętej x_0 wykresu funkcji f leży nad (pod) osią OX , to nad (pod) nią leży także pewien jego odcinek, zawierający ten punkt (ryc. 4.31, 4.32).



Ryc. 4.31.

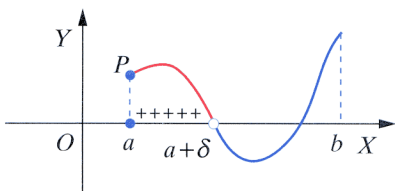


Ryc. 4.32.

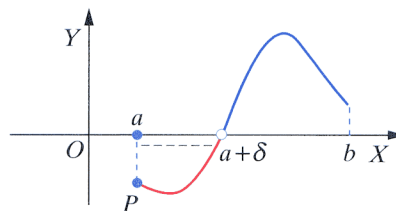
□ Dowód. Rozpatrzmy przypadek, gdy funkcja f jest dodatnia w punkcie x_0 (w przypadku, gdy ona jest w tym punkcie ujemna, dowód przebiega analogicznie).

Ponieważ $f(x_0) > 0$, więc przyjmijmy $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$. Z ciągłości funkcji f w punkcie x_0 wynika istnienie takiej liczby $\delta > 0$, że dla wartości x spełniającej nierówność $|x - x_0| < \delta$ zachodzi nierówność $|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$, czyli nierówność $-\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2}$. Stąd wynika, że dla $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ jest $f(x) - f(x_0) > -\frac{f(x_0)}{2}$, czyli $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0$ i ostatecznie $f(x) > 0$. □

Uwaga. Twierdzenie to jest prawdziwe także wtedy, gdy punkt x_0 , w którym funkcja f jest ciągła, jest jednym z krańców przedziału $\langle a; b \rangle$, gdzie funkcja ta jest określona. Wówczas, gdy $x_0 = a$ i $f(a) > 0$ ($f(a) < 0$), to $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) dla wszystkich x większych od a i dostatecznie bliskich a (ryc. 4.33 i 4.34).

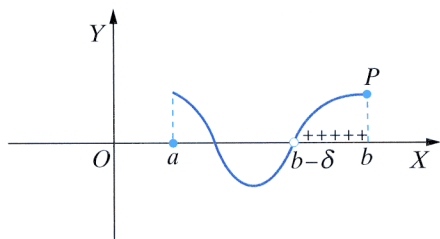


Ryc. 4.33.

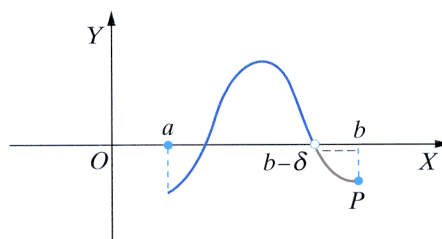


Ryc. 4.34.

Gdy zaś $x_0 = b$ i $f(b) > 0$ ($f(b) < 0$), to $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) dla wszystkich x mniejszych od b i dostatecznie bliskich b (ryc. 4.35 i 4.36).



Ryc. 4.35.

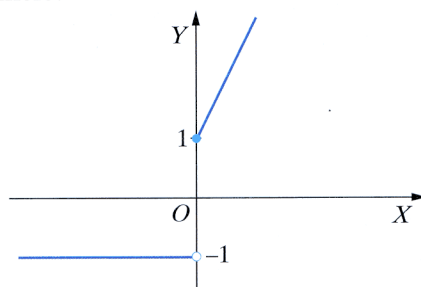


Ryc. 4.36.

Funkcja nieciągła w punkcie i dodatnia (ujemna) w nim może mieć w dowolnym jego otoczeniu wartości przeciwnego znaku niż w tym punkcie.

Przykład 1. Funkcja $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{dla } x \geq 0 \\ -1 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$

jest w punkcie $x_0 = 0$ dodatnia, zaś w dowolnym jego otoczeniu ma wartości nie tylko dodatnie, lecz także ujemne (ryc. 4.37).

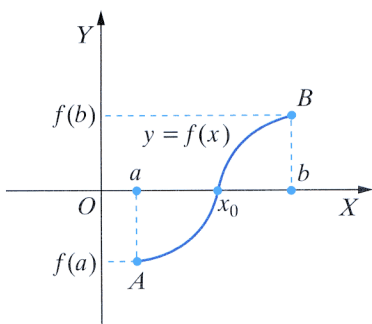


Ryc. 4.37.

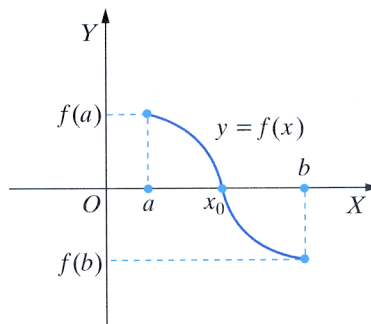
Twierdzenie (o zerowaniu się funkcji ciągłej)

Jeżeli funkcja $f: \langle a; b \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ jest ciągła w przedziale $\langle a; b \rangle$, w którego krańcach przyjmuje wartości przeciwnych znaków, czyli $f(a) \cdot f(b) < 0$, to w pewnym punkcie x_0 wewnętrznym tego przedziału przyjmuje wartość 0.

Geometrycznie oznacza to, że wykres funkcji f ciągłej w przedziale domkniętym $\langle a; b \rangle$, którego punkty $A = (a; f(a))$ i $B = (b; f(b))$ leżą po przeciwnych stronach osi OX , przecina ją w pewnym punkcie wewnętrznym x_0 przedziału $\langle a; b \rangle$ (ryc. 4.38 i 4.39).



Ryc. 4.38.



Ryc. 4.39.

Dowód pomijamy, gdyż wykracza on poza ramy naszego podręcznika.

Z twierdzenia tego wynika następujący wniosek:

Wniosek. Jeżeli funkcja f ciągła w przedziale $\langle a; b \rangle$ przyjmuje w jego krańcach różne wartości: $f(a) = A$, $f(b) = B$, to dla każdej liczby C leżącej między A i B istnieje taka liczba $x_0 \in (a; b)$, że $f(x_0) = C$.

□ Dowód. Przyjmijmy, że $A < B$. Dla dowolnej liczby $C \in (A; B)$ rozważmy funkcję $g(x) = f(x) - C$. Funkcja g jest oczywiście ciągła w przedziale $\langle a; b \rangle$, a ponadto $g(a) = f(a) - C = A - C < 0$, zaś $g(b) = f(b) - C = B - C > 0$. Wobec tego na mocy twierdzenia o zerowaniu się funkcji ciągłej istnieje taka liczba $x_0 \in (a; b)$, że $g(x_0) = 0$, czyli $f(x_0) = C$. □

Udowodniony wniosek można wyrazić krótko: Funkcja ciągła w przedziale domkniętym przybiera każdą wartość pośrednią między swymi różnymi wartościami na krańcach tego przedziału (ryc. 4.40).

Funkcja nieciągła w przedziale może tej własności nie mieć.

Przykład 2. Niech $f(x) = [x]$ dla $x \in \langle 0; 2 \rangle$. Funkcja ta przyjmuje w podanym przedziale tylko trzy wartości: 0, 1 i 2.

Twierdzenie o zerowaniu się funkcji ciągłej pozwala wysnuć kolejny ważny wniosek:

Wniosek. Każdy wielomian stopnia nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

□ Dowód. Niech f będzie wielomianem stopnia nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych. Bez zmniejszenia ogólności rozumowania możemy przyjąć, że współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej jest równy 1 (dlaczego?). Zatem niech:

$$f(x) = x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

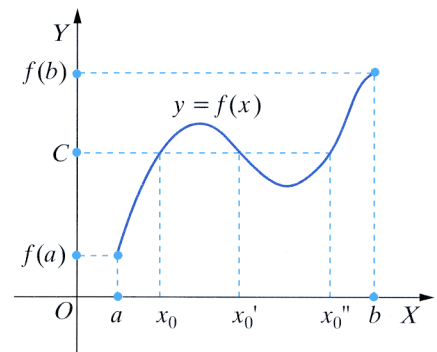
Dla każdego $x \neq 0$ mamy: $f(x) = x^{2n+1} \left(1 + \frac{a_{2n}}{x} + \frac{a_{2n-1}}{x^2} + \dots + \frac{a_1}{x^{2n}} + \frac{a_0}{x^{2n+1}} \right)$. Zauważmy, że gdy $|x|$ jest dostatecznie duże, to wyrażenie w nawiasie ma wartość dodatnią. Wystarczy, że $|x|$ będzie większe od każdej z liczb: $2(2n+1)|a_{2n}|$, $\sqrt{2(2n+1)|a_{2n-1}|}$,

$$\sqrt[3]{2(2n+1)|a_{2n-2}|}, \dots, \sqrt[2n+1]{2(2n+1)|a_0|}, \text{ bo wtedy } \left| \frac{a_{2n}}{x} \right| < \frac{1}{2(2n+1)},$$

$$\left| \frac{a_{2n-1}}{x^2} \right| < \frac{1}{2(2n+1)}, \dots, \left| \frac{a_0}{x^{2n+1}} \right| < \frac{1}{2(2n+1)} \text{ i wobec tego:}$$

$$\left| \frac{a_{2n}}{x} \right| + \left| \frac{a_{2n-1}}{x^2} \right| + \dots + \left| \frac{a_0}{x^{2n+1}} \right| < (2n+1) \cdot \frac{1}{2(2n+1)} = \frac{1}{2}. \text{ Stąd:}$$

$$\left| \frac{a_{2n}}{x} + \frac{a_{2n-1}}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{x^{2n+1}} \right| \leq \left| \frac{a_{2n}}{x} \right| + \left| \frac{a_{2n-1}}{x^2} \right| + \dots + \left| \frac{a_0}{x^{2n+1}} \right| < \frac{1}{2}, \text{ czyli:}$$



Ryc. 4.40.

$$-\frac{1}{2} < \frac{a_{2n}}{x} + \frac{a_{2n-1}}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{x^{2n+1}} < \frac{1}{2}, \text{ więc } \frac{1}{2} < 1 + \frac{a_{2n}}{x} + \frac{a_{2n-1}}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{x^{2n+1}} < \frac{3}{2}.$$

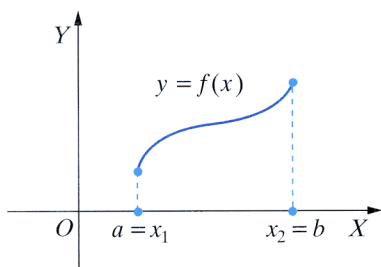
Zatem, gdy $|x|$ jest dostatecznie duże, to $f(x)$ jest takiego znaku jak x^{2n+1} , to znaczy ujemnego dla $x < 0$, dodatniego zaś dla $x > 0$. A ponieważ $f(x)$ jest funkcją ciągłą w zbiorze \mathbf{R} , więc dla pewnego x przyjmuje wartość 0. \square

Oto kolejne twierdzenie, które przyjmujemy bez dowodu.

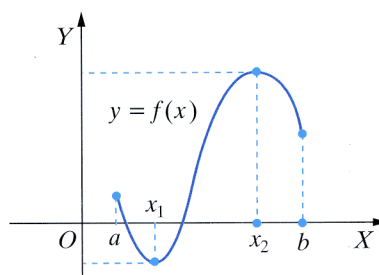
Twierdzenie

Każda funkcja ciągła w przedziale domkniętym $\langle a; b \rangle$ osiąga w pewnym jego punkcie x_1 wartość najmniejszą i w pewnym jego punkcie x_2 wartość największą.

Mówiąc krócej: Każda funkcja ciągła w przedziale domkniętym ma w tym przedziale zarówno wartość najmniejszą, jak i wartość największą. Wartości te mogą być przyjmowane i na krańcach tego przedziału i wewnątrz niego (ryc. 4.41 i 4.42).



Ryc. 4.41.



Ryc. 4.42.

Punktów, w których jest przyjmowana każda z tych wartości, może być więcej niż jeden, a nawet może być ich nieskończenie wiele.

Na przykład:

- funkcja $f(x) = x^2$ w przedziale $\langle -2; 2 \rangle$ przyjmuje wartość największą równą 4 w punktach $x_1 = -2$ i $x_2 = 2$, a wartość najmniejszą 0 w punkcie 0.
- funkcja $f(x) = 2x - 3$ w przedziale $\langle -1; 3 \rangle$ przybiera wartość najmniejszą -5 w punkcie $x = -1$, a wartość największą 3 w punkcie $x = 3$.

Założmy, że f jest funkcją ciągłą w przedziale $\langle a; b \rangle$ i nie jest funkcją stałą. Niech m oznacza jej wartość najmniejszą, zaś M – wartość największą w tym przedziale. Oprócz m i M funkcja ta przybiera w tym przedziale jeszcze wszystkie wartości pośrednie między nimi i tylko te wartości. Zbiór wartości funkcji f jest więc przedziałem $\langle m; M \rangle$. Zatem zbiorem wartości funkcji ciągłej w przedziale domkniętym jest:

- przedział domknięty, gdy ona nie jest stałą;
- zbiór jednoelementowy, gdy jest ona funkcją stałą.

Na przykład:

- zbiorem wartości funkcji $f(x) = x^2$ w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$ jest przedział $\langle 0; 4 \rangle$;
- zbiorem wartości funkcji $g(x) = -2x + 1$ w przedziale $\langle 0; 2 \rangle$ jest przedział $\langle -3; 1 \rangle$.



Pytania i zadania

- Podaj twierdzenie o lokalnym zachowaniu znaku funkcji ciągłej.
- Sformułuj twierdzenie o zerowaniu się funkcji ciągłej.
- Podaj twierdzenie o wartościach pośrednich funkcji ciągłej.
- Omów zbiór wartości funkcji ciągłej w przedziale domkniętym.
- Jakim zbiorem może być zbiór wartości funkcji ciągłej w przedziale otwartym? Zilustruj to przykładami.
- W którym z przedziałów: $\langle -4; -3 \rangle, \langle -3; -2 \rangle, \langle -2; -1 \rangle, \langle -1; 0 \rangle, \langle 0; 1 \rangle, \langle 1; 2 \rangle, \langle 2; 3 \rangle$ wielomian $f(x) = x^5 - 3x^3 + x^2 - 6$ ma pierwiastek?
- Wykaż, że wielomian $W(x)$ ma w podanym przedziale pierwiastek, gdy:
 - $W(x) = x^3 - 3x - 1, x \in \langle 1; 2 \rangle;$
 - $W(x) = x^3 + x + 2, x \in \langle -2; 0 \rangle;$
 - $W(x) = x^5 - 2x^2 + 2, x \in \langle -1; 1 \rangle.$
- Czy funkcja:
 - $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{dla } x = 1; \end{cases}$
 - $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{dla } 0 < x \leq 1 \end{cases}$
 ma w przedziale $\langle 0; 1 \rangle$ wartości: najmniejszą i największą? Odpowiedź uzasadnij.
- * Wykaż, że wielomian $W(x) = 10ax^4 - 4ax^3 + a^2x^2 + 6x - 2$ ma w przedziale $\langle 0; 1 \rangle$ pierwiastek rzeczywisty dla każdej wartości a .
- * Udowodnij, że dla każdej liczby dodatniej a równanie $x^3 + (a+2)x^2 - x - 3a = 0$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste.
- * Udowodnij, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych a_1, a_2, \dots, a_n równanie $\frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \dots + \frac{1}{x-a_n} = 0$ ma $n-1$ pierwiastków rzeczywistych.
- * Funkcje $f: \langle a; b \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ i $g: \langle a; b \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ są ciągłe w przedziale $\langle a; b \rangle$ i spełniają nierówności: $f(a) < g(a)$ i $f(b) > g(b)$. Udowodnij, że w pewnym punkcie wewnętrznym przedziału $\langle a; b \rangle$ funkcje te przyjmują wspólną wartość.
- * Udowodnij, że jeżeli funkcja $f: \langle a; b \rangle \rightarrow \langle a; b \rangle$ jest ciągła w przedziale $\langle a; b \rangle$, to ma w nim punkt stały, to znaczy istnieje w tym przedziale taki punkt x_0 , że $f(x_0) = x_0$.
- * Czy przedział $\langle 0; 1 \rangle$ można rozbić na takie dwa niepuste i rozłączne zbiory A i B , aby istniała funkcja ciągła $f: \langle 0; 1 \rangle \rightarrow \langle 0; 1 \rangle$ spełniająca warunki:
 - $f(a) \in B$ dla każdego $a \in A$,
 - $f(b) \in A$ dla każdego $b \in B$?
 Odpowiedź uzasadnij.
- * Udowodnij, że jeżeli funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 , a funkcja g jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$, to funkcja $g \circ f$ (złożenie funkcji f i g) jest ciągła w punkcie x_0 .
- * O funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ wiadomo, że dla każdej liczby rzeczywistej $a > 1$ funkcja $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ określona wzorem $g(x) = f(x) + f(ax)$ jest ciągła w zbiorze \mathbf{R} . Udowodnij, że funkcja f jest także ciągła w zbiorze \mathbf{R} .

- 17*. Funkcja $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ jest ciągła w zbiorze \mathbf{R} i spełnia warunek: $f(2) + f(5) < 7 < f(3) + f(4)$. Wykaż, że istnieją takie liczby rzeczywiste a i b , że $a + b = 7$ i $f(a) + f(b) = 7$.
- 18*. Funkcja $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ jest ciągła w zbiorze \mathbf{R} i okresowa o okresie $t \neq 0$. Udowodnij, że istnieje takie $x_0 \in \mathbf{R}$, że $f\left(x_0 + \frac{t}{2}\right) = f(x_0)$.
19. Funkcja $f: \langle 0; 1 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ jest ciągła w przedziale $\langle 0; 1 \rangle$ i spełnia warunek $f(0) = f(1)$. Udowodnij, że istnieje taka liczba $x_0 \in \left\langle 0; \frac{1}{2} \right\rangle$, że $f\left(x_0 + \frac{1}{2}\right) = f(x_0)$.
- 20**. Dane są funkcje $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ i $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, ciągłe w \mathbf{R} i mające miejsca zerowe. Udowodnij, że jeżeli funkcja $f - g$ nie ma miejsc zerowych, to funkcja $f + g$ ma miejsce zerowe.
- 21**. Dana jest taka funkcja $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, która jest ciągła w \mathbf{R} i spełnia warunki: $f(1000) = 999$, $f(x) \cdot f(f(x)) = 1$ dla każdego $x \in \mathbf{R}$. Oblicz $f(500)$.
- 22*. Udowodnij, że każda funkcja ciągła i różnowartościowa w przedziale jest w nim monotoniczna.

9. Pochodna funkcji w punkcie i jej interpretacje

Mając daną funkcję f zmiennej x , określoną w przedziale X , i dwa różne punkty x i x_0 z tego przedziału, utwórzmy wyrażenie:

$$(*) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

gdzie różnicę $f(x) - f(x_0)$ nazywamy **przyrostem wartości funkcji** (lub przyrostem zmiennej zależnej), różnicę $x - x_0$ – **przyrostem argumentu** (lub przyrostem zmiennej niezależnej), ich iloraz $(*)$ zaś – **ilorazem różnicowym**. Przyrost wartości funkcji może być dodatni, ujemny lub zerowy, a przyrost argumentu – dodatni lub ujemny.

Przy ustalonym x_0 i zmiennym x iloraz różnicowy $(*)$ jest funkcją zmiennej $x \neq x_0$. Jeżeli ma on w punkcie x_0 granicę właściwą, to granicę tę nazywamy **pochodną funkcji f w punkcie x_0** i oznaczamy symbolem $f'(x_0)$. Tak więc:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

O funkcji f mającej pochodną w punkcie x_0 mówimy, że jest **różniczkowalna** w tym punkcie. Funkcję mającą pochodną w każdym punkcie pewnego przedziału otwartego nazywamy funkcją **różniczkowalną w tym przedziale**. Pochodna funkcji w danym punkcie x_0 jest liczbą. Przyporządkowanie każdemu punktowi x wartości pochodnej $f'(x)$ nazywamy **pochodną f' funkcji f** . Wyznaczanie pochodnej funkcji określamy też mianem **różniczkowania** tej funkcji.

Przykład 1. Oblicz pochodną funkcji $f(x) = ax$ w punkcie x_0 .

Rozwiązanie:

Zgodnie z określeniem pochodnej funkcji w punkcie:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{ax - ax_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} a \cdot \frac{x - x_0}{x - x_0} = a.$$

Odpowiedź: $f'(x_0) = a$.

Przykład 2. Wyznacz $f'(1)$, jeśli $f(x) = 2x^2 - x$.

Rozwiązanie:

Korzystając z określenia pochodnej funkcji w punkcie, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - x) - (2 \cdot 1^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3. \end{aligned}$$

Odpowiedź: $f'(1) = 3$.

Jeżeli iloraz różnicowy $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ma w punkcie x_0 granicę jednostronną, to tę granicę nazywamy **pochodną jednostronną** funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy ją odpowiednio symbolem $f'_+(x_0)$ – **pochodna prawostronna**, i $f'_-(x_0)$ – **pochodna lewostronna**.

Tak więc:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Funkcja jest różniczkowalna w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy jest różniczkowalna w tym punkcie prawostronnie i lewostronnie i obie jej pochodne jednostronne w tym punkcie są równe.

Funkcję nazywamy **różniczkowalną w przedziale domkniętym** $\langle a; b \rangle$, gdy jest: różniczkowalna w przedziale otwartym $(a; b)$, prawostronnie różniczkowalna w a i lewostronnie różniczkowalna w b .

Udowodnimy teraz twierdzenie ustalające związek między ciągłością i różniczkowalnością funkcji w punkcie:

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to jest ciągła w tym punkcie.

Dowód. Zauważmy, że dla każdego $x \neq x_0$ zachodzi równość:

$$f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) + f(x_0). \text{ Ponieważ z założenia istnieje granica:}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ (równa } f'(x_0)) \text{ oraz } \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0, \text{ więc:}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) + f(x_0) \right] = f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0).$$

To zaś dowodzi ciągłości funkcji f w punkcie x_0 .

Udowodnione twierdzenie można też sformułować następująco:

Ciągłość funkcji w punkcie jest warunkiem koniecznym jej różniczkowalności w tym punkcie.

Inaczej mówiąc, jeśli funkcja nie jest ciągła w danym punkcie, to nie ma pochodnej w tym punkcie. Warto zauważyć, że twierdzenie odwrotne do powyższego nie jest prawdziwe. Funkcja ciągła w danym punkcie może nie być w nim różniczkowalna.

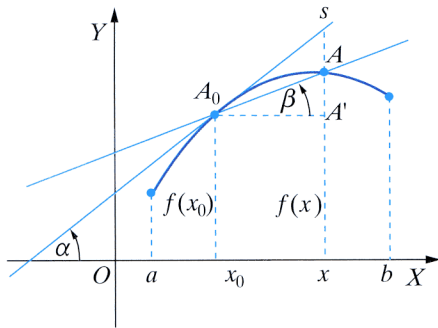
Przykład 3. Funkcja $f(x) = |x|$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, ale nie jest w nim różniczkowalna, bowiem:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1, \text{ zaś:}$$

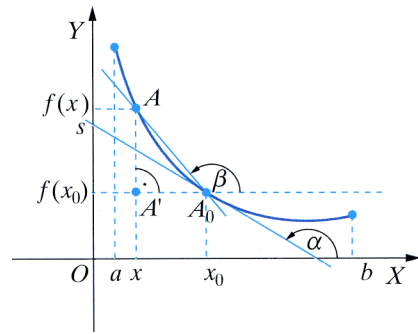
$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Interpretacja geometryczna pochodnej

Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $(a; b)$, x_0 – ustalonym punktem tego przedziału, zaś x – dowolnym punktem tego przedziału, różnym od x_0 . Rozważmy wykres tej funkcji (ryc. 4.43 i 4.44):



Ryc. 4.43.



Ryc. 4.44.

Dla danego $x \neq x_0$ iloraz różnicowy $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ jest tangensem kąta β , jaki tworzy sieczna przechodząca przez punkty $A_0 = (x_0; f(x_0))$ i $A = (x; f(x))$ z dodatnim kierunkiem osi OX – jest to tak zwany **kąt nachylenia** tej siecznej do osi OX .

Rzeczywiście, w trójkącie prostokątnym $A_0 A' A$ mamy: $A_0 A' = |x - x_0|$, $AA' = |f(x) - f(x_0)|$ i wówczas w przypadku, gdy β jest kątem :

a) ostrym (ryc. 4.43):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{AA'}{A_0 A'} = \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} = \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$

b) rozwartym (ryc. 4.44):

$$\operatorname{tg} (180^\circ - \beta) = \frac{AA'}{A_0 A'} = \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} = \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = -\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ skąd wynika,}$$

$$\text{że } \operatorname{tg} \beta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Gdy $x \rightarrow x_0$, to punkt A zbliża się do punktu A_0 , zaś sieczna obraca się dokoła punktu A_0 . Jeśli istnieje $f'(x_0)$, to współczynnik kierunkowy siecznej dąży do $f'(x_0)$. Zatem sieczna zbliża się do prostej o równaniu $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, przechodzącej przez punkt A_0 . Prosta tę nazywamy styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0; f(x_0))$ (prosta s na ryc. 4.44). Oznaczając przez α jej kąt nachylenia do osi OX , otrzymujemy równość $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$. Tak więc:

Pochodna funkcji f w punkcie x_0 równa jest tangensowi kąta α , jaki styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0; f(x_0))$ tworzy z osią OX zwróconą w kierunku dodatnim.

Styczna ta ma równanie:

$$(*) y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Przykład 1. Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $P = (1; 1)$.

Rozwiązanie:

Mamy dane: $x_0 = 1, f(x_0) = 1$. Obliczmy $f'(x_0)$.

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

Równanie stycznej jest więc następujące: $y - 1 = 2(x - 1)$, czyli $y = 2x - 1$.

Odpowiedź: $y = 2x - 1$.

Przykład 2. Wyznacz kąt α nachylenia do osi OX stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ w punkcie $P = \left(1; \frac{1}{3}\right)$.

Rozwiązanie:

Wiemy, że tangens tego kąta jest równy $f'(1)$. Obliczmy $f'(1)$:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{3} \cdot \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{3}(x^2 + x + 1) = 1. \text{ Jeśli } \operatorname{tg} \alpha = 1, \text{ to } \alpha = 45^\circ. \end{aligned}$$

Odpowiedź: $\alpha = 45^\circ$.

Interpretacja fizyczna pochodnej

W ruchu jednostajnym punktu materialnego droga s przebyta przez ten punkt w czasie t jest wprost proporcjonalna do t . Znany wzór $s = v \cdot t$ ukazuje, jak zmienia się s , gdy t rośnie, oraz jak łatwo wyznaczyć prędkość v tego ruchu. Gdy do chwili t_0 punkt przebył drogę s_0 , zaś do chwili t – drogę s , wówczas prędkość punktu $v = \frac{s - s_0}{t - t_0}$.

Rozważmy teraz swobodny spadek ciała, w którym przebytą drogę s obliczamy ze wzoru $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$, gdzie g – to przyspieszenie ziemskie, zaś t – czas. Aby się dowiedzieć, jaka

jest prędkość w tym ruchu, rozpatrzmy drogi s_0 i s tego ciała w chwilach t_0 i t . Oczywiście, mamy wzory $s(t_0) = \frac{1}{2}gt_0^2$ i $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$. Zatem w czasie od t_0 do t ciało to przebywa drogę $s - s_0 = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt_0^2$.

Na pytanie o prędkość ruchu tego ciała trudno byłoby odpowiedzieć tak, jak w przypadku ruchu jednostajnego, gdyż iloraz $\frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{1}{2}g(t + t_0)$ zmienia się w różnych chwilach czasu, nie można więc określić prędkości. Iloraz ten trzeba by przyjąć za **prędkość średnią** ruchu w czasie od t_0 do t . Oczywiście, nie będzie on charakteryzował zmian ruchu ciała w czasie między t_0 i t , gdy różnica $t - t_0$ będzie duża. Iloraz ten można w przybliżeniu przyjąć za prędkość ruchu w chwili t_0 dopiero wtedy, gdy różnica $t - t_0$ jest odpowiednio mała. Przybliżenie to będzie tym dokładniejsze, im czas t będzie bliższy t_0 . Stąd też prędkość $v(t)$ ruchu ciała w chwili t_0 określamy jako granicę ilorazu $\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$, gdy $t \rightarrow t_0$, czyli

li pochodną funkcji $s(t)$ w punkcie t_0 . Tak więc $v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0)$.

Pytania i zadania



- Co to jest iloraz różnicowy funkcji f w punkcie x_0 dla przyrostu $x - x_0$?
- Podaj definicję pochodnej funkcji f w punkcie x_0 .
- Co to znaczy, że funkcja jest różniczkowalna:
 - w przedziale otwartym,
 - jednostronnie w danym punkcie,
 - w przedziale domkniętym?
- Jaki jest związek ciągłości funkcji w punkcie z jej różniczkowalnością w tym punkcie?
- Zinterpretuj pochodną funkcji w punkcie: a) geometrycznie; b) fizycznie.
- Na podstawie definicji oblicz $f'(x_0)$, gdy:

a) $f(x) = -3$, $x_0 = 2$;	b) $f(x) = x^2$, $x_0 = -1$;	c) $f(x) = 2x^3$, $x_0 = -2$;
d) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$;	e) $f(x) = \frac{2}{x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$;	f) $f(x) = \frac{x+1}{2x}$, $x_0 = 1$;
g) $f(x) = x^2 - x$, $x_0 = 0$;		
h) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $x_0 = 3$.		
- Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie P , gdy:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $P = (1; 1)$;	b) $f(x) = \sqrt{x}$, $P = (4; 2)$;
c) $f(x) = x^3$, $P = (-1; -1)$;	
d) $f(x) = x^4$, $P = (-1; 1)$.	
- Zbadaj różniczkowalność funkcji f w punkcie x_0 , gdy:

a) $f(x) = x \cdot x $, $x_0 = 0$;	b) $f(x) = x+1 $, $x_0 = -1$;
c) $f(x) = \frac{x+ x }{2}$, $x_0 = 0$;	
d) $f(x) = x-1 \sqrt{x}$, $x_0 = 1$;	

$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & \text{gd } x \leq 0 \\ \frac{x-2}{2}, & \text{gd } x > 0, x_0 = 0; \end{cases} \quad \text{f) } f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{gd } x < -1 \\ -x^2 - x, & \text{gd } x \geq -1, x_0 = -1; \end{cases}$$

$$\text{g) } f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{gd } x < 0 \\ 2x, & \text{gd } x \geq 0, x_0 = 0; \end{cases} \quad \text{h) } f(x) = |x-1| \cdot \sqrt[3]{x}, x_0 = 0.$$

9. Wyznacz $f'(a)$, jeśli $f(x) = (x-a) \cdot g(x)$ i g jest funkcją ciągłą w punkcie a .

10. Funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie a . Oblicz granicę:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(x)}{x - a}.$$

11. W jakim punkcie należy poprowadzić do wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 2x$ styczną, aby była ona równoległa do prostej o równaniu $y = -2x$?

12*. Funkcja $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ jest różniczkowalna w $x_0 = 0$ oraz $f'(x_0) \neq 0$ i spełnia dla każdego $x \in \mathbf{R}$ warunek $f(ax) = b \cdot f(x)$, gdzie a i b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi i $0 \neq |a| \neq 1$. Udowodnij, że $a = b$.

10. Działania arytmetyczne na funkcjach różniczkowalnych

Udowodnimy teraz kilka twierdzeń ułatwiających obliczanie pochodnych.

Twierdzenie 1.

Pochodna funkcji stałej jest równa zeru:

$$(c)' = 0.$$

Dowód. Niech $f(x) = c$ dla każdego $x \in \mathbf{R}$. Wówczas dla każdego $x_0 \in \mathbf{R}$ mamy:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0. \quad \square$$

Na przykład jeśli $f(x) = 5$, to $f'(x) = 0$.

Twierdzenie 2.

Jeżeli f jest funkcją różniczkowalną, to iloczyn $c \cdot f$, gdzie c jest ustaloną liczbą rzeczywistą, jest funkcją różniczkowalną i zachodzi wzór:

$$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x).$$

Dowód. Niech f będzie funkcją różniczkowalną w punkcie x_0 . Wówczas $(c \cdot f)'(x_0) =$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(cf)(x) - (cf)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{cf(x) - cf(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c \cdot f'(x_0). \quad \square$$

Twierdzenie 3.

Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie x_0 , to suma $f + g$ także jest funkcją różniczkowalną w tym punkcie i zachodzi wzór:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Dowód. Korzystając z definicji pochodnej i twierdzenia o działaniach arytmetycznych na granicach funkcji, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} (f + g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0). \quad \square \end{aligned}$$

Przykładowo: $(2x^3 + 3x^2)' = (2x^3)' + (3x^2)' = 2(x^3)' + 3(x^2)' = 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x = 6x^2 + 6x = 6x(x + 1)$.

Twierdzenie 4.

Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie x_0 , to różnica $f - g$ jest także funkcją różniczkowalną w tym punkcie i zachodzi wzór:

$$(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0).$$

Dowód. Twierdzenie to wynika jako wniosek z twierdzeń 2. i 3. Mamy bowiem:

$$\begin{aligned} (f - g)'(x) &= [f(x) - g(x)]' = [f(x) + (-1)g(x)]' = f'(x) + [(-1)g(x)]' = \\ &= f'(x) + (-1)g'(x) = f'(x) - g'(x). \quad \square \end{aligned}$$

Na przykład: $(x^2 - 5x)' = (x^2)' - (5x)' = 2x - 5$.

Twierdzenie 5.

Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie x_0 , to iloczyn $f \cdot g$ jest funkcją różniczkowalną w tym punkcie i zachodzi wzór:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Dowód. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 3. skorzystamy z definicji pochodnej i z twierdzenia o działaniach na granicach funkcji:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)] \cdot g(x) + f(x_0)[g(x) - g(x_0)]}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) + f(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\
&= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0), \text{ gdyż z założenia } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \\
&\text{ i } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0) \text{ oraz } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0), \text{ co z kolei wynika z ciągłości funk-} \\
&\text{cji } g \text{ w punkcie } x_0 \text{ (różniczkowalnej w tym punkcie). } \square
\end{aligned}$$

Przykładowo: $\left[(x^2 - 2x) \cdot x^3 \right]' = (x^2 - 2x)' \cdot x^3 + (x^2 - 2x) \cdot (x^3)' =$
 $= (2x - 2)x^3 + (x^2 - 2x) \cdot 3x^2 = 2x^4 - 2x^3 + 3x^4 - 6x^3 = 5x^4 - 8x^3.$

Twierdzenie 6.

Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie x_0 oraz $g(x_0) \neq 0$, to iloraz $\frac{f}{g}$ jest funkcją różniczkowalną w tym punkcie i zachodzi wzór:

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

\square Dowód. Na mocy definicji pochodnej i twierdzenia o działaniach na granicach funkcji

$$\begin{aligned}
\text{otrzymujemy: } \left(\frac{f}{g} \right)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\left(\frac{f}{g} \right)(x) - \left(\frac{f}{g} \right)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)]g(x_0) - f(x_0)[g(x) - g(x_0)]}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{g(x)} - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0)}{g(x)g(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\
&= f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)}{(g(x_0))^2} \cdot g'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}, \text{ gdyż z założenia:} \\
&\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \text{ i } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0), \\
&g(x_0) \neq 0 \text{ oraz } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(x_0)} \text{ (funkcja } g \text{ jako różniczkowalna w punkcie } x_0 \text{ jest w tym} \\
&\text{punkcie ciągła). } \square
\end{aligned}$$

Na przykład:

$$\left(\frac{x-1}{2x}\right)' = \frac{(x-1)' \cdot 2x - (x-1) \cdot (2x)'}{(2x)^2} = \frac{1 \cdot 2x - (x-1) \cdot 2}{4x^2} = \frac{2x - 2x + 2}{4x^2} = \frac{2}{4x^2} = \frac{1}{2x^2}.$$

Udowodnione twierdzenia 3–6 zapamiętajmy jako **twierdzenie o działaniach arytmetycznych na funkcjach różniczkowalnych**, wyrażone wzorami:

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x),$$

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x),$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}, \text{ gdy } g(x) \neq 0.$$

Na koniec podamy jeszcze kilka wzorów na pochodne funkcji elementarnych.

Twierdzenie 7.

Pochodna funkcji potęgowej $f(x) = x^\alpha$ wyraża się wzorem $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Z określenia funkcji potęgowej wynika, że podany w tym twierdzeniu wzór zachodzi:

- dla każdego $x \in \mathbf{R}$, gdy $\alpha \in \mathbf{N}$ (przy dodatkowej umowie, że 0° oznacza liczbę 1);
- dla każdego $x \neq 0$, gdy $\alpha \in \mathbf{C}$;
- dla każdego $x > 0$, gdy $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{C}$.

Dowód tego wzoru dla $\alpha \in \mathbf{N}$ możecie przeprowadzić samodzielnie, stosując zasadę indukcji matematycznej. Teraz udowodnimy go, korzystając z definicji pochodnej i wzoru na różnicę $a^k - b^k$. Dla dowolnego x_0 mamy:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^\alpha - x_0^\alpha}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^{\alpha-1} + x^{\alpha-2} \cdot x_0 + x^{\alpha-3} \cdot x_0^2 + \dots + x \cdot x_0^{\alpha-2} + x_0^{\alpha-1})}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{\alpha-1} + x^{\alpha-2} \cdot x_0 + x^{\alpha-3} \cdot x_0^2 + \dots + x \cdot x_0^{\alpha-2} + x_0^{\alpha-1}) = \\
&= x_0^{\alpha-1} + x_0^{\alpha-2} \cdot x_0 + x_0^{\alpha-3} \cdot x_0^2 + \dots + x_0 \cdot x_0^{\alpha-2} + x_0^{\alpha-1} = \alpha x_0^{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Gdy $\alpha \in \mathbb{C}_+$, to $-\alpha \in \mathbb{N}_+$ i wówczas na mocy udowodnionego wzoru na pochodną funkcji potęgowej o wykładniku naturalnym i wzoru na pochodną ilorazu dwóch funkcji otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x^\alpha)' = \left(\frac{1}{x^{-\alpha}}\right)' = \frac{(1)' \cdot x^{-\alpha} - 1 \cdot (x^{-\alpha})'}{(x^{-\alpha})^2} = \frac{0 \cdot x^{-\alpha} + \alpha x^{-\alpha-1}}{x^{-2\alpha}} = \\
&= \alpha x^{-\alpha-1} \cdot x^{2\alpha} = \alpha x^{-\alpha-1+2\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Niech α będzie dodatnią liczbą wymierną. Gdy $\alpha = \frac{1}{n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$, wtedy:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^\alpha - x_0^\alpha}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}}}{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n - \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^n} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}}}{\left(x^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}}\right) \left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} + \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-2} x_0^{\frac{1}{n}} + \dots + x^{\frac{1}{n}} \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{n-2} + \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} \right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} + \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-2} x_0^{\frac{1}{n}} + \dots + x^{\frac{1}{n}} \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{n-2} + \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n x_0^{\frac{n-1}{n}}} = \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x_0^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} x_0^{\frac{1}{n}-1} = \alpha x^{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Gdy $\alpha = \frac{m}{n}$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}_+$, wówczas:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^\alpha - x_0^\alpha}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^{\frac{m}{n}} - x_0^{\frac{m}{n}}}{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n - \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m - \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^m}{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n - \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^n} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\left(x^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}}\right) \left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} + \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-2} x_0^{\frac{1}{n}} + \dots + x^{\frac{1}{n}} \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{m-2} + \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \right)}{\left(x^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}}\right) \left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} + \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-2} x_0^{\frac{1}{n}} + \dots + x^{\frac{1}{n}} \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{n-2} + \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} \right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^{\frac{m-1}{n}} + x^{\frac{m-2}{n}} \cdot x_0^{\frac{1}{n}} + \dots + x^{\frac{1}{n}} \cdot x_0^{\frac{m-2}{n}} + x_0^{\frac{m-1}{n}}}{x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-2}{n}} \cdot x_0^{\frac{1}{n}} + \dots + x^{\frac{1}{n}} \cdot x_0^{\frac{n-2}{n}} + x_0^{\frac{n-1}{n}}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x_0^{\frac{m-1}{n}} + x_0^{\frac{m-2}{n}} \cdot x_0^{\frac{1}{n}} + \dots + x_0^{\frac{1}{n}} \cdot x_0^{\frac{m-2}{n}} + x_0^{\frac{m-1}{n}}}{x_0^{\frac{n-1}{n}} + x_0^{\frac{n-2}{n}} \cdot x_0^{\frac{1}{n}} + \dots + x_0^{\frac{1}{n}} \cdot x_0^{\frac{n-2}{n}} + x_0^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{m \cdot x_0^{\frac{m-1}{n}}}{n \cdot x_0^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{m}{n} x_0^{\frac{m-1}{n} - \frac{n-1}{n}} = \\
&= \frac{m}{n} x_0^{\frac{m-1-n+1}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x_0^{\frac{m-n}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x_0^{\frac{m}{n}-1} = \alpha x^{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Pomijamy dowód, gdy α jest liczbą niewymierną.

Na przykład:

$$a) (\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}};$$

$$b) (\sqrt{x^3})' = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}.$$

Twierdzenie 8*

Pochodne funkcji trygonometrycznych wyrażają się wzorami:

$$1. (\sin x)' = \cos x \text{ dla każdego } x \in \mathbf{R};$$

$$2. (\cos x)' = -\sin x \text{ dla każdego } x \in \mathbf{R};$$

$$3. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ dla } x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \text{ gdzie } k \in \mathbf{C};$$

$$4. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \text{ dla } x \neq k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbf{C}.$$

Dowód wzoru 1. Niech $f(x) = \sin x$. Wówczas dla każdego $x_0 \in \mathbf{R}$ mamy:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \sin \frac{x-x_0}{2} \cdot \cos \frac{x+x_0}{2}}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \cos \frac{x+x_0}{2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \cos \frac{x+x_0}{2} = 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0, \text{ gdyż}
\end{aligned}$$

jeśli $x \rightarrow x_0$, to $\frac{x-x_0}{2} \rightarrow 0$, a co za tym idzie, $\frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \rightarrow 1$. Gdy zaś $x \rightarrow x_0$, to również

$$\frac{x+x_0}{2} \rightarrow x_0, \text{ skąd na mocy ciągłości funkcji cosinus } \cos \frac{x+x_0}{2} \rightarrow \cos x_0.$$

Dowód wzoru 2. przebiega analogicznie. Stosując wzór na pochodną ilorazu dwóch funkcji, otrzymujemy:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ dla każdego } x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{C}, \text{ zaś:}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} \text{ dla każdego } x \neq k\pi, k \in \mathbf{C}. \square$$

Oto przykłady pochodnych funkcji trygonometrycznych:

$$\begin{aligned}(\sin^2 x)' &= (\sin x \cdot \sin x)' = (\sin x)' \cdot \sin x + \sin x \cdot (\sin x)' = 2(\sin x)' \cdot \sin x = \\ &= 2 \cos x \cdot \sin x = \sin 2x;\end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{(1)' \cdot \cos x - 1 \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{-1 \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{tg}^2 x)' = (\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} x)' = 2 \operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{tg} x)' = 2 \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x};$$

$$\begin{aligned}(x \operatorname{ctg} x)' &= (x)' \cdot \operatorname{ctg} x + x \cdot (\operatorname{ctg} x)' = 1 \cdot \operatorname{ctg} x + x \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \\ &= \operatorname{ctg} x - \frac{x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x \cdot \sin x - x}{\sin^2 x} = \frac{\sin 2x - 2x}{2 \sin^2 x}.\end{aligned}$$



Pytania i zadania

1. Podaj twierdzenie o pochodnej:

a) sumy, różnicy i iloczynu dwóch funkcji, b) ilorazu dwóch funkcji.

2. Podaj wzory na pochodne funkcji:

a) potęgowej, b*) trygonometrycznych.

3*. Podaj przykłady pochodnych funkcji trygonometrycznych.

4**. Styczne do wykresów funkcji $y = f(x)$, $y = g(x)$ i $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ w punkcie $x_0 = 0$ przecinają oś OX pod tym samym kątem. Wyznacz największą wartość $f(0)$.

11. Obliczanie pochodnych wielomianów i funkcji wymiernych

Zastosujmy poznane twierdzenia w zadaniach i w tym celu prześledźmy kolejne przykłady.

Najpierw jednak zauważmy, że jeśli $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, to zgodnie ze znanymi już nam regułami różniczkowania otrzymujemy:

$$\begin{aligned}f'(x) &= (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0)' = \\ &= (a_n x^n)' + (a_{n-1} x^{n-1})' + \dots + (a_2 x^2)' + (a_1 x)' + (a_0)' = \\ &= a_n (x^n)' + a_{n-1} (x^{n-1})' + \dots + a_2 (x^2)' + a_1 (x)' + 0 = \\ &= n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1.\end{aligned}$$

Przykład 1. Wyznacz $f'(x)$, jeśli $f(x) = -3x^4 + 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1$.

Rozwiązanie:

$$f'(x) = \left(-3x^4 + 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1\right)' = (-3x^4)' + (2x^3)' - \left(\frac{1}{2}x^2\right)' - (1)' = -12x^3 + 6x^2 - x.$$

Odpowiedź: $f'(x) = -12x^3 + 6x^2 - x$.

Przykład 2. Wyznacz pochodną funkcji $f(x) = (x^2 - 3x + 2)(x^3 - 4x + 3)$.

Rozwiązanie:

Sposób pierwszy. Stosujemy wzór na pochodną iloczynu funkcji:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 - 3x + 2)'(x^3 - 4x + 3) + (x^2 - 3x + 2) \cdot (x^3 - 4x + 3)' = \\ &= (2x - 3)(x^3 - 4x + 3) + (x^2 - 3x + 2)(3x^2 - 4) = \\ &= 2x^4 - 8x^2 + 6x - 3x^3 + 12x - 9 + 3x^4 - 4x^2 - 9x^3 + 12x + 6x^2 - 8 = \\ &= 5x^4 - 12x^3 - 6x^2 + 30x - 17. \end{aligned}$$

Sposób drugi. Ponieważ:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 3x + 2)(x^3 - 4x + 3) = x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 15x^2 - 17x + 6, \text{ więc} \\ f'(x) &= (x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 15x^2 - 17x + 6)' = \\ &= (x^5)' - (3x^4)' - (2x^3)' + (15x^2)' - (17x)' + (6)' = 5x^4 - 12x^3 - 6x^2 + 30x - 17. \end{aligned}$$

Odpowiedź: $f'(x) = 5x^4 - 12x^3 - 6x^2 + 30x - 17$.

Przykład 3. Wyznacz pochodną funkcji $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 4}$.

Rozwiązanie:

Zgodnie ze wzorem na pochodną ilorazu funkcji dla każdego $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$ mamy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 4} \right)' = \frac{(x^2 - x + 1)'(x^2 - 4) - (x^2 - x + 1)(x^2 - 4)'}{(x^2 - 4)^2} = \\ &= \frac{(2x - 1)(x^2 - 4) - (x^2 - x + 1)2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - x^2 + 4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^2 - 10x + 4}{(x^2 - 4)^2}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: $f'(x) = \frac{x^2 - 10x + 4}{(x^2 - 4)^2}$ dla $x \neq -2$ i $x \neq 2$.

Przykład 4. Oblicz pochodną funkcji $f(x) = \frac{(2 - x^2)(3 - x^2)}{(1 - x)^2}$.

Rozwiązanie:

Obliczmy najpierw pochodne licznika i mianownika podanej funkcji wymiernej:

$$\begin{aligned} \left[(2 - x^2)(3 - x^2) \right]' &= (2 - x^2)'(3 - x^2) + (2 - x^2)(3 - x^2)' = \\ &= -2x(3 - x^2) + (2 - x^2)(-2x) = -2x(3 - x^2 + 2 - x^2) = -2x(5 - 2x^2); \\ \left[(1 - x)^2 \right]' &= \left[(1 - x)(1 - x) \right]' = 2(1 - x) \cdot (1 - x)' = -2(1 - x). \text{ Zatem:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\frac{(2-x^2)(3-x^2)}{(1-x)^2} \right]' = \frac{\left[(2-x^2)(3-x^2) \right]' (1-x)^2 - (2-x^2)(3-x^2) \cdot \left[(1-x)^2 \right]'}{(1-x)^4} = \\
&= \frac{-2x(5-2x^2)(1-x)^2 - (2-x^2)(3-x^2)(-2(1-x))}{(1-x)^4} = \\
&= \frac{2(1-x) \left[-x(5-2x^2)(1-x) + (2-x^2)(3-x^2) \right]}{(1-x)^4} = \\
&= \frac{2(-5x+5x^2+2x^3-2x^4+6-2x^2-3x^2+x^4)}{(1-x)^3} = \frac{2(-x^4+2x^3-5x+6)}{(1-x)^3}.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: $f'(x) = \frac{2(-x^4+2x^3-5x+6)}{(1-x)^3}$ dla $x \neq 1$.

Przykład 5. Wyznacz pochodną funkcji $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$.

Rozwiązanie:

Zapiszmy najpierw wzór funkcji f w równoważnej i dogodniejszej dla obliczeń postaci: $f(x) = x^{-3} + x^{-2} + x^{-1}$. Wówczas, stosując wzór na pochodną sumy funkcji i wzór na pochodną funkcji potęgowej, otrzymujemy:

$$f'(x) = -3x^{-4} + (-2x^{-3}) + (-x^{-2}) = -x^{-4}(3+2x+x^2) = -\frac{x^2+2x+3}{x^4}.$$

Odpowiedź: $f'(x) = -\frac{x^2+2x+3}{x^4}$ dla $x \neq 0$.

Przykład 6. Oblicz pochodną funkcji $f(x) = \frac{3x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

Rozwiązanie:

Zapiszmy wzór tej funkcji w postaci: $f(x) = 3 \cdot \frac{x}{\sqrt{x}} - 2 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 3x^{\frac{1}{2}} - 2 + x^{-\frac{1}{2}}$. Wobec tego $f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}(3x-1) = \frac{3x-1}{2\sqrt{x^3}}$.

Odpowiedź: $f'(x) = \frac{3x-1}{2\sqrt{x^3}}$ dla $x > 0$.

Przykład 7. Wyznacz pochodną funkcji $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
&\text{Ponieważ } f(x) = x^{-\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{2}{3}}, \text{ więc } f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{1}{3}x^{-\frac{5}{3}}(x^{\frac{1}{3}} - 4) = \\
&= -\frac{\sqrt[3]{x} - 4}{3\sqrt[3]{x^5}}.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: $f'(x) = -\frac{\sqrt[3]{x} - 4}{3\sqrt[3]{x^5}}$ dla $x > 0$.

Przykład 8*. Wyznacz pochodną funkcji $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że funkcja ta jest określona w zbiorze $\{x \in \mathbf{R}; \sin x + \cos x \neq 0\} = \{x \in \mathbf{R}; \sin x \neq -\cos x\} = \{x \in \mathbf{R}; \operatorname{tg} x \neq -1\} = \left\{x \in \mathbf{R}; x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \wedge k \in \mathbf{C}\right\}$.

Korzystając ze wzoru na pochodną ilorazu dwóch funkcji i ze wzorów na pochodną sinus i cosinus, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sin x - \cos x)'(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2} = \\ &= \frac{(\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \\ &= \frac{(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\left(2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\pi}{4}\right)^2} = \\ &= \frac{2}{4 \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: $f'(x) = \sin^{-2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ dla $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$ i $k \in \mathbf{C}$.

Przykład 9*. Wyznacz pochodną funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$.

Rozwiązanie:

Dla każdego $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbf{C}$, mamy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)' = (\operatorname{tg} x)' - (\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} - \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \\ &= \frac{4}{(2 \sin x \cos x)^2} = \frac{4}{\sin^2 2x} = 4 \sin^{-2} 2x. \end{aligned}$$

Odpowiedź: $f'(x) = 4 \sin^{-2} 2x$ dla $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbf{C}$.

Pytania i zadania

1. Wyznacz pochodne funkcji:

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$;

b) $f(x) = -4x^3 + 6x^2 - x + 2$;

c) $f(x) = (x+1)(x^2 - x + 1)$;

d) $f(x) = (x-1)(x^2 + x + 1)$;



e) $f(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$; f) $f(x) = (x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$;

g) $f(x) = (x-2)^2(2x+1)$; h) $f(x) = (2x+1)(x^2-3)$.

2. Wyznacz pochodne funkcji:

a) $f(x) = \frac{x+1}{1-x}$; b) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+x-2}$; c) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^3+1}$;

d) $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+x+1}$; e) $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x}$; f) $f(x) = \frac{x^4-x}{x^2}$.

3. Oblicz pochodne funkcji:

a) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$; b) $f(x) = 2x^{-\frac{3}{2}}$; c) $f(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{4}{3}}$;

d) $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$; e) $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$; f) $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x^2}$;

g) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$; h) $f(x) = \sqrt{x}(\sqrt[3]{x^2+x})$; i) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}}$.

4. Oblicz pochodne funkcji:

a) $f(x) = \sin x + \cos x$; b) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}$; c) $f(x) = \sqrt{x} \operatorname{ctg} x$;

d) $f(x) = \frac{1-\sin x}{\cos x}$; e) $f(x) = \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$; f) $f(x) = \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}$;

g) $f(x) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$; h) $f(x) = \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$.

5*. Wyznacz współczynniki a, b, c funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, wiedząc, że jej wykres przechodzi przez punkty $A = (1; 0)$ i $B = (2; 0)$ oraz że styczna do tego wykresu w punkcie A ma współczynnik kierunkowy równy -1 .

6*. Udowodnij, że liczba x_0 jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy x_0 jest wspólnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ i jego pochodnej $W'(x)$.

7*. Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n wielomian $W_n(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ jest podzielny przez wielomian $x^2 - 2x + 1$.

8**. Wykaż, że pochodną wielomianu $W(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$ można wyrazić wzorem $W'(x) = W(x) \cdot \left(\frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \dots + \frac{1}{x-a_n} \right)$.

9. Dla jakich a i b liczba 1 jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu $P(x) = ax^4 + bx^3 + 1$?

10**. Wielomian $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ spełnia warunki: $P(1) = 0$ oraz $P(x) \geq 0$ dla każdej liczby $x \in \mathbf{R}$. Udowodnij, że:

$$a_n + 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + \dots + (n+1)a_0 = 0$$

11**. Wyznacz takie dodatnie liczby naturalne m i n , aby wielomian $f(x) = x^n - mx^{n-1} + mx - 1$ był podzielny przez $(x-1)^2$.

12. Monotoniczność funkcji różniczkowalnych

Poznamy teraz twierdzenia, które pozwalają badać, czy funkcja różniczkowalna w danym przedziale jest w nim rosnąca czy malejąca.

Niech f będzie funkcją różniczkowalną w przedziale P .

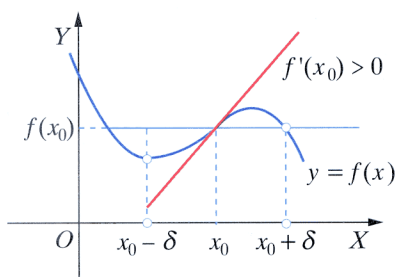
Twierdzenie 1.

Jeżeli w pewnym punkcie $x_0 \in P$ pochodna $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), to istnieje takie otoczenie $U \subset P$ punktu x_0 , w którym:

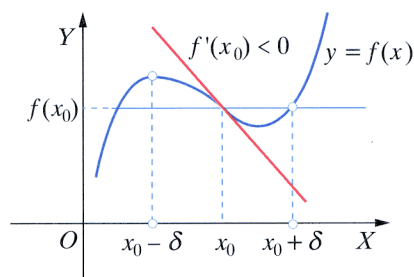
$$f(x) > f(x_0) \quad (f(x) < f(x_0)) \quad \text{dla } x > x_0 \text{ oraz}$$

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)) \quad \text{dla } x < x_0.$$

Ilustracją geometryczną twierdzenia są ryciny 4.45 i 4.46.



Ryc. 4.45.



Ryc. 4.46.

□ Dowód. Załóżmy, że $f'(x_0) > 0$ (dowód dla $f'(x_0) < 0$ przebiega podobnie). Ponieważ

$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, więc istnieje takie otoczenie U punktu x_0 , w którym

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$. Oznacza to, że dla pewnej liczby $\delta > 0$ jest $f(x) > f(x_0)$, gdy

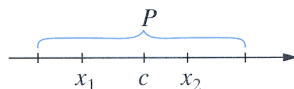
$x_0 < x < x_0 + \delta$ oraz $f(x) < f(x_0)$, gdy $x_0 - \delta < x < x_0$. □

Poznajmy twierdzenie o wzrastaniu (maleniu) funkcji w przedziale:

Twierdzenie 2.

Jeżeli pochodna funkcji f jest w przedziale P dodatnia (ujemna), to funkcja f jest w tym przedziale rosnąca (malejąca).

□ Dowód. Załóżmy, że $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in P$ oraz $x_1, x_2 \in P$ i $x_1 < x_2$ (ryc. 4.47). Mamy udowodnić, że $f(x_1) < f(x_2)$. W przedziale $\langle x_1; x_2 \rangle$ funkcja f jest ciągła (jako funkcja różniczkowalna w przedziale P , który zawiera przedział $\langle x_1; x_2 \rangle$). Funkcja ta ma w tym przedziale wartość największą, przy czym nie może osiągać tej wartości w żadnym punkcie $x \in \langle x_1; x_2 \rangle$.



Ryc. 4.47.

Gdyby bowiem przyjmowała ją w pewnym punkcie $c \in \langle x_1; x_2 \rangle$, w którym $f'(c) > 0$ (z założenia), wówczas na mocy twierdzenia 1. istniałyby punkty $x > c$ takie, że $f(x) > f(c)$. Wobec tego największą wartością funkcji f w przedziale $\langle x_1; x_2 \rangle$ może być tylko $f(x_2)$.

Wynika stąd, że $f(x_2) > f(x_1)$. Natomiast jeśli $f'(x) < 0$ dla $x \in P$, wówczas $-f'(x) > 0$, a co za tym idzie: $-f$ jest funkcją rosnącą w przedziale P . Zatem funkcja f jest wtedy malejąca w tym przedziale. \square

Zauważmy, że twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, na przykład funkcja $f(x) = x^3$ rosnąca w przedziale $(-1; 1)$ nie ma pochodnej stale dodatniej w tym przedziale, ponieważ $f'(0) = 0$.

Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.

Jeżeli funkcja f jest rosnąca (malejąca) w przedziale P , to ma pochodną $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) dla każdego $x \in P$.

\square Dowód. Jeśli funkcja f jest rosnąca w przedziale P , to jej iloraz różnicowy $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ jest dodatni dla $x \in P$ i $x \neq x_0$, więc jego granica $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ jest liczbą nieujemną. Podobnie rozumiemy dla funkcji malejącej. \square

Mamy następujące wnioski:

1. $(f'(x) > 0 \text{ dla każdego } x \in P) \Rightarrow (f \text{ rośnie w } P)$, $(f \text{ rośnie w } P) \Rightarrow (f'(x) \geq 0 \text{ dla każdego } x \in P)$.
2. $(f'(x) < 0 \text{ dla każdego } x \in P) \Rightarrow (f \text{ maleje w } P)$, $(f \text{ maleje w } P) \Rightarrow (f'(x) \leq 0 \text{ dla każdego } x \in P)$.

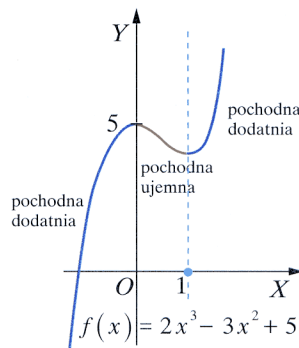
Przykład 1. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5.$$

Rozwiązanie:

Dana funkcja jest różniczkowalna w całym zbiorze \mathbf{R} liczb rzeczywistych. Jej pochodna $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$. Ponieważ:

1. $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 6x(x - 1) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ lub } x > 1$, więc funkcja f rośnie w przedziałach $(-\infty; 0)$ i $(1; +\infty)$;
2. $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 6x(x - 1) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$, więc f maleje w przedziale $(0; 1)$ (ryc. 4.48).



Ryc. 4.48.

Odpowiedź: Funkcja f rośnie w przedziałach $(-\infty; 0)$ i $(1; +\infty)$, maleje zaś w przedziale $(0; 1)$.

Przykład 2. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

Rozwiązanie:

Funkcja ta jest określona i różniczkowalna w zbiorze $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, czyli w zbiorze $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Obliczamy pochodną tej funkcji: $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$ dla $x \neq 0$.

Ponieważ:

$$1. f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{x^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 2) > 0 \Leftrightarrow x < -2$$

lub $x > 2$, więc funkcja f rośnie w przedziałach $(-\infty; -2)$ i $(2; +\infty)$;

$$2. f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{x^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x^2} < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0 \text{ i } x \neq 0 \Leftrightarrow -2 < x < 0 \text{ lub } 0 < x < 2, \text{ więc}$$

funkcja f maleje w przedziałach $(-2; 0)$ i $(0; 2)$.

Odpowiedź: Dana funkcja jest rosnąca w przedziałach $(-\infty; -2)$ i $(2; +\infty)$, a malejąca w przedziałach $(-2; 0)$ i $(0; 2)$.

Przykład 3. Udowodnij, że dla każdej liczby dodatniej x zachodzi nierówność $x^5 - \frac{4}{3}x^3 + x > 0$.

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję $f(x) = x^5 - \frac{4}{3}x^3 + x$. Jest ona określona i różniczkowalna w całym zbiorze \mathbf{R} liczb rzeczywistych. Jej pochodna $f'(x) = 5x^4 - 4x^2 + 1 = x^4 + 4x^4 - 4x^2 + 1 = x^4 + (2x^2 - 1)^2$. Widzimy więc, że $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in \mathbf{R}$, co dowodzi, że funkcja f jest rosnąca w zbiorze \mathbf{R} . Zatem, gdy $x > 0$, to $f(x) > f(0)$. Wynika stąd dowodzona nierówność, ponieważ $f(0) = 0$.

Przykład 4. Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = x^3 + mx^2 - mx - 2$ jest rosnąca w zbiorze \mathbf{R} ?

Rozwiązanie:

Dana funkcja jest określona i różniczkowalna w zbiorze \mathbf{R} . Jej pochodna $f'(x) = 3x^2 + 2mx - m$, a więc jest funkcją kwadratową dla każdej wartości m . Należy wyznaczyć te wartości m , dla których $f'(x) \geq 0$ dla każdego $x \in \mathbf{R}$. Z własności funkcji kwadratowej wynika, że jej wyróżnik musi być niedodatni.

$$\text{Obliczamy: } \Delta = (2m)^2 - 4 \cdot 3(-m) = 4m^2 + 12m = 4m(m + 3).$$

$$\text{Zatem } \Delta \leq 0 \Leftrightarrow (m + 3)m \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 0.$$

Odpowiedź: Dana funkcja jest rosnąca w zbiorze \mathbf{R} dla $m \in [-3; 0]$.

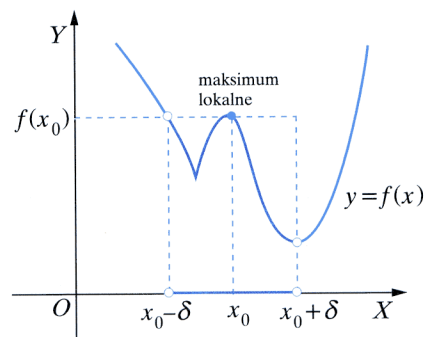


Pytania i zadania

- Podaj twierdzenie o wzrastaniu i maleniu funkcji różniczkowalnej.
- Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji:
 - $f(x) = x^2 - 2x + 5$;
 - $f(x) = -x^3 + 3x$;
 - $f(x) = x^4 - 8x^2$;
 - $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6$;
 - $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 3$;
 - $f(x) = x^5 - 5x$.
- Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji:
 - $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$;
 - $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$;
 - $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$;
 - $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$;
 - $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$;
 - $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$.
- Dla jakich wartości m funkcja $f(x) = \frac{m+1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + (2m-5)x + 6$ jest rosnąca w zbiorze \mathbf{R} ?
- Wykaż, że funkcja:
 - $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ jest malejąca w przedziale $(0; \frac{\pi}{2})$;
 - $f(x) = 2x - \sin x \cdot \cos x$ jest rosnąca w zbiorze \mathbf{R} .
- Udowodnij, że dla każdej liczby $x \in \mathbf{R}$ zachodzi nierówność $x^4 - x^2 + 1 \geq \frac{1}{x^2 + 1}$.
- * Udowodnij, że gdy a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $a < b$, to $a^3 - a^2 + a < b^3 - b^2 + b$.
- Udowodnij, że funkcja $f: P \rightarrow \mathbf{R}$ różniczkowalna w przedziale P jest rosnąca w tym przedziale wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x) \geq 0$ dla każdego $x \in P$ i dla każdego dwóch punktów $x_1, x_2 \in P$ takich, że $x_1 < x_2$, istnieje punkt $x \in (x_1, x_2)$ dla którego $f'(x) > 0$.

13. Ekstrema funkcji różniczkowalnych

Niech f będzie funkcją określoną w pewnym otoczeniu U punktu x_0 . Jeżeli istnieje takie otoczenie $V \subset U$ punktu x_0 , że $f(x_0)$ jest **największą** wartością funkcji f spośród wszystkich wartości, jakie funkcja ta przyjmuje w otoczeniu V , to $f(x_0)$ nazywamy **maksimum lokalnym** funkcji f i mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 maksimum lokalne (ryc. 4.49). Tak więc:



Ryc. 4.49.

$f(x_0)$ jest maksimum lokalnym funkcji $f \Leftrightarrow \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x_0 - \delta < x < x_0 + \delta} (f(x) \leq f(x_0))$.

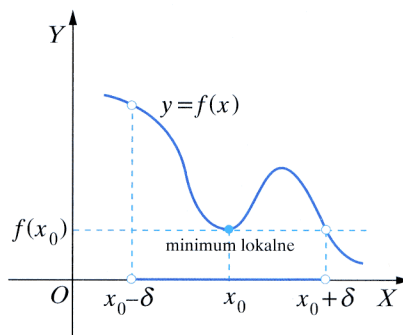
Jeżeli zaś istnieje takie otoczenie $V \subset U$ punktu x_0 , że $f(x_0)$ jest **najmniejszą** wartością funkcji f spośród wszystkich wartości, jakie funkcja ta przyjmuje w otoczeniu V , to $f(x_0)$

nazywamy **minimum lokalnym** funkcji f i mówimy, że funkcja f posiada w punkcie x_0 minimum lokalne (ryc. 4.50). Zatem:

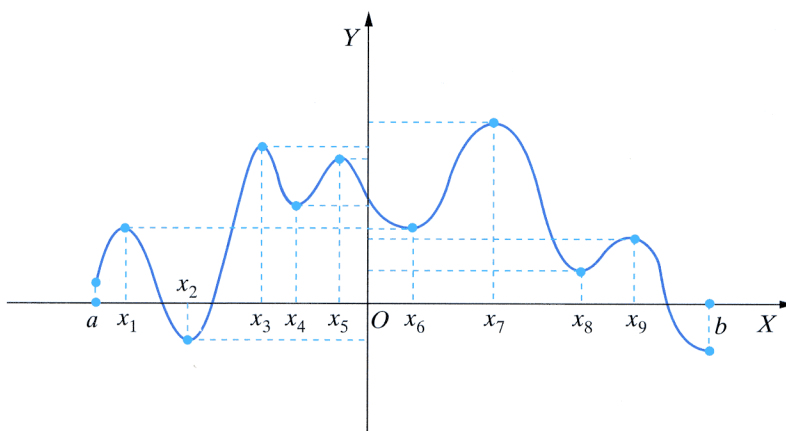
$$f(x_0) \text{ jest minimum lokalnym funkcji } f \Leftrightarrow \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x_0 - \delta < x < x_0 + \delta} (f(x) \geq f(x_0)).$$

Maksima i minima lokalne funkcji obejmujemy wspólną nazwą **ekstremów lokalnych** funkcji. Ekstrema te są pojęciami lokalnymi, ponieważ odnoszą się do zachowania się funkcji w pewnym dostatecznie małym otoczeniu danego punktu i nie zależą od wartości funkcji poza tym otoczeniem. Dlatego należy je odróżniać od pojęć **największej i najmniejszej wartości** funkcji w danym zbiorze, gdyż te wartości dotyczą całego zbioru, w którym rozpatrujemy funkcję, często na przykład dziedziny tej funkcji. Jeśli funkcja ma w danym zbiorze którąś z tych wartości, to tylko jedną wartość największą lub jedną wartość najmniejszą, zaś ekstremów lokalnych może mieć więcej niż jedno (a nawet nieskończenie wiele).

Na przykład funkcja, której wykres przedstawia poniższa rycina:



Ryc. 4.50.



Ryc. 4.51.

ma 9 ekstremów lokalnych: 5 maksimumów lokalnych w punktach odpowiednio: x_1, x_3, x_5, x_7, x_9 i 4 minima lokalne w punktach odpowiednio: x_2, x_4, x_6, x_8 . Maksimum tej funkcji w punkcie x_7 jest zarazem jej wartością największą w przedziale $\langle a; b \rangle$, zaś najmniejszą wartość ma ona w punkcie b i wartość ta nie pokrywa się z żadnym minimumem. Warto zauważyć, że minimum lokalne funkcji może być większe od któregoś z maksimumów; w naszym przykładzie mamy minima w punktach x_4 i x_6 większe od maksimum w punkcie x_9 , a maksimum w punkcie x_1 jest równe minimum w punkcie x_6 .

Podamy teraz twierdzenia, na których podstawie można wyznaczać ekstrema funkcji różniczkowalnych.

Twierdzenie 1.

Jeżeli funkcja f różniczkowalna w punkcie x_0 ma w tym punkcie ekstremum, to jej pochodna w tym punkcie jest równa zero.

Inaczej mówiąc, warunkiem koniecznym do tego, aby funkcja f różniczkowalna w punkcie x_0 miała w tym punkcie ekstremum, jest zachodzenie równości $f'(x_0) = 0$.

□ Dowód. Załóżmy, że funkcja f ma w punkcie x_0 maksimum lokalne (dowód dla minimum lokalnego jest analogiczny). Zatem istnieje taka liczba $\delta > 0$, że $f(x) \leq f(x_0)$ dla

$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$. Rozważmy iloraz różnicowy tej funkcji: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Dla $x_0 - \delta < x < x_0$

iloraz ten jest nieujemny: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, gdyż $x - x_0 < 0$ i $f(x) - f(x_0) \leq 0$, zaś dla

$x_0 < x < x_0 + \delta$ iloraz ten jest niedodatni $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, ponieważ wtedy $x - x_0 > 0$

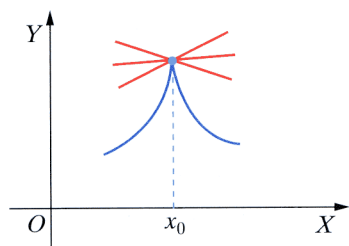
i $f(x) - f(x_0) \leq 0$. Przechodząc w obu tych nierównościach do granicy przy $x \rightarrow x_0$, otrzymujemy:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

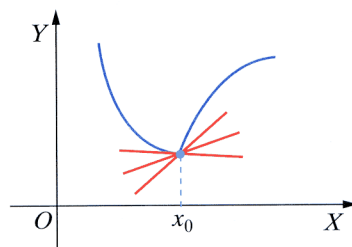
$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Ale z założenia o różniczkowalności funkcji f w punkcie x_0 wynika, że $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$. Wobec tego $0 \leq f'(x_0) \leq 0$, a stąd: $f'(x_0) = 0$. □

Uwaga 1. Założenie, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , jest istotne, bowiem funkcja mająca w punkcie x_0 ekstremum może nie mieć w tym punkcie pochodnej (ryc. 4.52 i 4.53).



Ryc. 4.52.



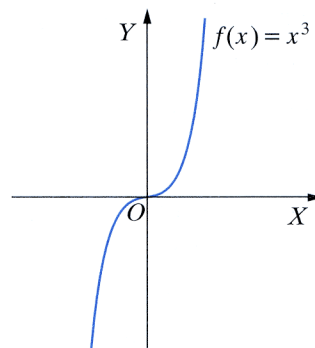
Ryc. 4.53.

Uwaga 2. Twierdzenie odwrotne do udowodnionego twierdzenia nie jest prawdziwe. Funkcja może nie mieć ekstremum w punkcie, w którym ma pochodną równą zero. Na przykład funkcja $f(x) = x^3$, której wykres widzimy na rycinie na następnej stronie (ryc. 4.54), ma w punkcie $x_0 = 0$ pochodną $f'(x_0) = 0$, a mimo to nie ma w tym punkcie ekstremum.

Wniosek. Jeżeli funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną $f'(x_0) \neq 0$, to nie ma w tym punkcie ekstremum.

Istnienie ekstremum funkcji f w punkcie x_0 , w którym jest ona różniczkowalna, oznacza geometrycznie, że styczna poprowadzona do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0; f(x_0))$ jest równoległa do osi OX .

Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

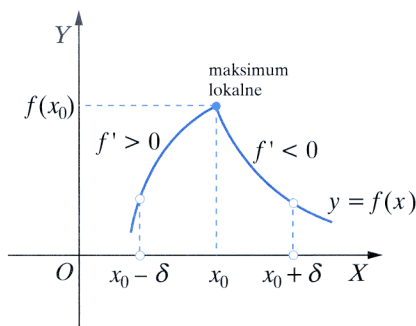


Ryc. 4.54.

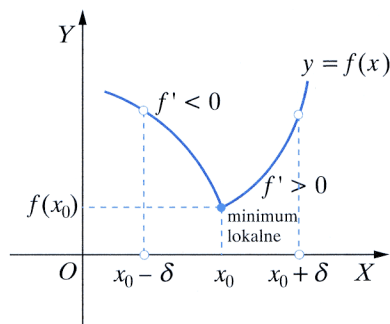
Twierdzenie 2.

Jeżeli funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 i różniczkowalna w pewnym jego sąsiedztwie oraz istnieje liczba dodatnia δ , taka że jeśli $x_0 - \delta < x < x_0$, to $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), a jeśli $x_0 < x < x_0 + \delta$, to $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$), to funkcja ma w punkcie x_0 maksimum lokalne (minimum lokalne).

Twierdzenie przedstawiają w sposób geometryczny ryciny 4.55 i 4.56.



Ryc. 4.55.



Ryc. 4.56.

□ Dowód. Rozważmy przypadek maksimum lokalnego (gdyż dowód dla minimum przebiega analogicznie). Ponieważ $f'(x) > 0$ dla $x_0 - \delta < x < x_0$, zaś $f'(x) < 0$ dla $x_0 < x < x_0 + \delta$, więc funkcja f w przedziale $(x_0 - \delta; x_0)$ rośnie, a w przedziale $(x_0; x_0 + \delta)$ maleje. Zatem dla każdego $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ jest $f(x_0) \geq f(x)$, co kończy dowód twierdzenia. □

Wykazaliśmy więc, że ciągłość funkcji f w punkcie x_0 oraz istnienie jej pochodnej f' przeciwnych znaków w sąsiedztwach: lewostronnym i prawostronnym tego punktu są warunkami wystarczającymi na istnienie ekstremum funkcji f w punkcie x_0 .

Wniosek. Funkcja $f(x)$ osiąga w punkcie x_0 maksimum lokalne (minimum lokalne), jeżeli spełnione są dwa warunki:

1. jest różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu x_0 ,
2. jej pochodna znika w tym punkcie, zmieniając swój znak z dodatniego na ujemny (z ujemnego na dodatni), gdy x , rosnąc, przechodzi przez x_0 .

Z udowodnionych twierdzeń wynika, że aby znaleźć ekstrema funkcji różniczkowalnej $f(x)$, można:

1. obliczyć pochodną funkcji $f(x)$,
2. znaleźć miejsca zerowe pochodnej $f'(x)$, czyli rozwiązać równanie $f'(x) = 0$,
3. zbadać, czy pochodna zmienia znak, gdy x , rosnąc, przechodzi przez jej miejsca zerowe,
4. obliczyć wartości funkcji w tych miejscach zerowych jej pochodnej, w których stwierdziliśmy zmianę znaku pochodnej.

Przykład 1. Wyznacz ekstrema funkcji $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.

Rozwiązanie:

Dana funkcja jest określona i różniczkowalna w zbiorze \mathbf{R} wszystkich liczb rzeczywistych. Jej pochodna $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$ dla każdego $x \in \mathbf{R}$. Po przyrównaniu $f'(x)$ do zera otrzymujemy: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ lub $x = 1$. Ponadto widzimy, że: $f'(x) > 0$ dla $x < -2$ lub $x > 1$, zaś $f'(x) < 0$ dla $-2 < x < 1$. Pochodna $f'(x)$ zmienia znak z dodatniego na ujemny, gdy x , rosnąc, przechodzi przez punkt $x_1 = -2$, zaś z ujemnego na dodatni, gdy x , rosnąc, przechodzi przez punkt $x_2 = 1$. Wobec tego, na podstawie warunku wystarczającego na istnienie ekstremum, stwierdzamy, że funkcja f osiąga w $x_1 = -2$ maksimum lokalne równe $f(-2) = 21$, a w punkcie $x_2 = 1$ minimum lokalne równe $f(1) = -6$.

Odpowiedź: $f_{\max}(x) = f(-2) = 21$, $f_{\min}(x) = f(1) = -6$.

Przykład 2. Znajdź ekstrema funkcji $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

Rozwiązanie:

Funkcja ta jest określona i różniczkowalna dla każdego $x \neq -1$ i $x \neq 1$. Jej pochodna:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} \text{ dla } x \neq -1 \text{ i } x \neq 1. \text{ Znajdujemy miejsca zerowe}$$

pochodnej: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3}$ lub $x = 0$, lub $x = \sqrt{3}$. Badamy jej znak:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 3 \Leftrightarrow x < -\sqrt{3} \text{ lub } x > \sqrt{3}, \text{ zaś}$$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 < 0$ i $x^2 \neq 0$ i $x^2 \neq 1 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < -1$ lub $-1 < x < 0$, lub $0 < x < 1$ bądź $1 < x < \sqrt{3}$. Na podstawie warunku wystarczającego na istnienie ekstremum stwierdzamy,

że dana funkcja osiąga w punkcie $x_1 = -\sqrt{3}$ maksimum lokalne równe $f(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

a w punkcie $x_2 = \sqrt{3}$ - minimum lokalne równe $f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Odpowiedź: $f_{\max}(x) = f(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $f_{\min}(x) = f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Przykład 3. Wiadomo, że funkcja $f(x) = \frac{ax+b}{(x-1)(x-4)}$ ma w punkcie $x = 2$ ekstremum równe -1 . Wyznacz a i b oraz zbadaj, czy jest to maksimum czy minimum.

Rozwiązanie:

Funkcja ta jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \neq 1$ i $x \neq 4$. Jej pochodna:

$$f'(x) = \frac{a(x-1)(x-4) - (ax+b)(2x-5)}{(x-1)^2(x-4)^2} = \frac{ax^2 - 5ax + 4a - 2ax^2 + 5ax - 2bx + 5b}{(x-1)^2(x-4)^2} =$$

$$= \frac{-ax^2 - 2bx + 4a + 5b}{(x-1)^2(x-4)^2} \text{ dla każdego } x \neq 1 \text{ i } x \neq 4.$$

Z treści zadania wynikają równości: $f'(2) = 0$ i $f(2) = -1$. Podstawiając $x = 2$ do wzoru funkcji $f(x)$ i jej pochodnej $f'(x)$, otrzymujemy:

$$f(2) = \frac{2a+b}{(2-1)(2-4)} = \frac{2a+b}{-2} \text{ oraz } f'(2) = \frac{-4a-4b+4a+5b}{(2-1)^2(2-4)^2} = \frac{b}{4}.$$

Należy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} \frac{b}{4} = 0 \\ \frac{2a+b}{-2} = -1 \end{cases}, \text{ skąd } a = 1 \text{ i } b = 0.$$

Funkcja f określona jest więc wzorem $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-4)}$, zaś jej pochodna

– wzorem: $f'(x) = \frac{-x^2+4}{(x-1)^2(x-4)^2}$.

Badamy znak pochodnej $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -x^2+4 > 0 \text{ i } x \neq 1 \Leftrightarrow x^2 < 4, \text{ i } x \neq 1 \Leftrightarrow -2 < x < 1, \text{ lub } 1 < x < 2, \text{ zaś:}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -x^2+4 < 0 \text{ i } x \neq 4 \Leftrightarrow x < -2 \text{ lub } 2 < x < 4, \text{ lub } x > 4.$$

Na podstawie warunku wystarczającego na istnienie ekstremum stwierdzamy, że funkcja f w punkcie $x = 2$ osiąga maksimum lokalne.

Odpowiedź: $a = 1, b = 0$. Funkcja $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-4)}$ ma w punkcie $x = 2$ maksimum lokalne równe -1 .

Przykład 4. Wyznacz wszystkie wartości parametru a , dla których funkcja $f(x) = 4x^3 - 5ax^2 - 5(3-a)x + 4$ nie osiąga minimum.

Rozwiązanie:

Funkcja ta jest określona i różniczkowalna w każdym punkcie $x \in \mathbf{R}$. Jej pochodna $f'(x) = 12x^2 - 10ax - 5(3-a)$ jest trójmianem kwadratowym o wyróżniku $\Delta = 100a^2 - 240a + 720 = (10a - 12)^2 + 576$, dodatnim dla każdej wartości rzeczywistej a . Ma więc dwa miejsca zerowe, między którymi jest ujemna, a poza nimi – dodatnia. Wobec tego dana funkcja ma dwa ekstrema lokalne obu rodzajów (maksimum i minimum) dla każdej wartości rzeczywistej a .

Odpowiedź: Nie ma takich wartości parametru a .

Wyznaczanie największej i najmniejszej wartości funkcji w przedziale

Wiemy, że każda funkcja ciągła w przedziale domkniętym osiąga w nim swoje wartości: największą i najmniejszą oraz wszystkie wartości pośrednie między nimi.

Jeśli funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle a; b \rangle$ i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału, to największej i najmniejszej wartości tej funkcji poszukujemy wśród jej wszystkich ekstremów lokalnych w tym przedziale i wartości na jego krańcach.

Przykład 1. Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ w przedziale $\langle -1; 1 \rangle$.

Rozwiązanie:

Dana funkcja jest określona i różniczkowalna w podanym przedziale (gdyż jest taka w całym zbiorze \mathbf{R} liczb rzeczywistych). Jej pochodna:

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 = 3(x^2 - 2x + 2) = 3(x - 1)^2 + 3$, a więc jest stale dodatnia. Oznacza to, że funkcja f jest rosnąca w zbiorze \mathbf{R} , a zatem również w podanym przedziale. Wartością największą danej funkcji w tym przedziale jest $f(1) = 2$, a najmniejszą $f(-1) = -12$.

Odpowiedź: $\max \{f(x); x \in \langle -1; 1 \rangle\} = 2 = f(1)$, $\min \{f(x); x \in \langle -1; 1 \rangle\} = -12 = f(-1)$.

Przykład 2. Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x + \frac{4}{x}$ w przedziale $\langle 1; 3 \rangle$.

Rozwiązanie:

Funkcja ta jest określona i różniczkowalna w danym przedziale. Jej pochodna:

$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^2}$, więc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ lub $x = 2$. Lecz -2 nie

należy do danego w zadaniu przedziału. Zauważmy, że $f'(x) < 0$, gdy $1 < x < 2$, zaś $f'(x) > 0$, gdy $2 < x < 3$. Wobec tego w punkcie $x = 2$ funkcja f osiąga minimum lokalne

równe $f(2) = 4$. Ponadto: $f(1) = 5$, zaś $f(3) = 4\frac{1}{3}$. Ponieważ $4 < 4\frac{1}{3} < 5$, więc $\max \{f(x); x \in \langle 1; 3 \rangle\} = 5 = f(1)$, zaś $\min \{f(x); x \in \langle 1; 3 \rangle\} = 4 = f(2)$.

Odpowiedź: $\max \{f(x); x \in \langle 1; 3 \rangle\} = 5$, $\min \{f(x); x \in \langle 1; 3 \rangle\} = 4$.



Pytania i zadania

- Dla funkcji f w punkcie x_0 podaj określenie:
 - maksimum lokalnego,
 - minimum lokalnego.
- Co to jest ekstremum funkcji? Dlaczego jest ono pojęciem lokalnym?
- Podaj warunek konieczny do zaistnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej.
- Podaj warunek wystarczający na istnienie ekstremum funkcji różniczkowalnej.
- Omów poszukiwanie wartości największej i najmniejszej funkcji w przedziale.
- Znajdź ekstrema funkcji:

a) $f(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$;	b) $f(x) = -x^3 + 12x + 2$;
c) $f(x) = x^3 - 3x$;	d) $f(x) = 3x^5 - 4x^3 + 3x$;
e) $f(x) = 3x^4 - 8x^3$;	f) $f(x) = -x^4 + 12x^3 - 46x^2 + 60x + 1$.

7. Znajdź ekstrema funkcji:

$$a) f(x) = \frac{x}{x^4 + 3};$$

$$b) f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1};$$

$$c) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4};$$

$$d) f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1};$$

$$e) f(x) = \frac{x^3}{2(4 - x^2)};$$

$$f) f(x) = \frac{3x}{(x^2 - 1)^2}.$$

8. Wykaż, że funkcja $f(x)$ nie ma ekstremum:

$$a) f(x) = x^3 + x^2 + x;$$

$$b) f(x) = 2x^3 + 3x + 5;$$

$$c) f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8;$$

$$d) f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 15x + 1;$$

$$e) f(x) = 4x^3 + 6x^2 + 12x + 1.$$

9. Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji:

$$a) f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \text{ w przedziale } \left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle;$$

$$b) f(x) = x^4 - 2x^2 + 3 \text{ w przedziale } \langle -2; 2 \rangle;$$

$$c) f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \text{ w przedziale } \langle -1; 3 \rangle;$$

$$d) f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1} \text{ w przedziale } \langle -2; 2 \rangle.$$

10. Funkcja $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$ osiąga ekstrema w punktach x_1 i x_2 . Napisz równanie prostej przechodzącej przez środek odcinka AB , gdzie $A = (x_1; f(x_1))$ i $B = (x_2; f(x_2))$ i równoległej do stycznej poprowadzonej do wykresu funkcji $f(x)$ w punkcie o odciętej $x_0 = 4$.

11*. Udowodnij, że:

$$a) |3x - x^3| \leq 2, \text{ gdy } |x| \leq 2; \quad b) |16x^5 - 20x^3 + 5x| \leq 1, \text{ gdy } |x| \leq 1;$$

$$c) \frac{2}{3} \leq \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \leq 2 \text{ dla każdego } x \in \mathbf{R}.$$

12*. Ile ekstremów ma funkcja $f(x) = ax^3 + x^2 + x + b$ w zależności od parametrów a i b ?

13*. Dla jakich wartości m funkcja $f(x) = \frac{m-2}{5}x^5 - \frac{2(m+3)}{3}x^3 + (m+1)x$ nie ma ekstremum?

14. Zadania prowadzące do ekstremum funkcji różniczkowalnej

Prześledźmy przykłady zadań, dotyczące zagadnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej.

Przykład 1. Liczbę 8 przedstaw w postaci sumy takich dwóch składników, których suma sześciątów będzie najmniejsza.

Rozwiązanie:

Oznaczmy poszukiwane składniki przez x i y . Mamy więc $x + y = 8$, skąd $y = 8 - x$ oraz $x^3 + y^3 = x^3 + (8 - x)^3 = x^3 + 8^3 - 3 \cdot 8^2 x + 3 \cdot 8x^2 - x^3 = 24 \left(x^2 - 8x + \frac{64}{3} \right)$. Zadanie sprowa-

dza się zatem do znalezienia takiej wartości x , dla której funkcja $f(x) = x^2 - 8x + \frac{64}{3}$ osiągnie najmniejszą wartość. Możemy to uczynić dwoma sposobami:

Sposób pierwszy (z zastosowaniem rachunku pochodnych). Ponieważ $f'(x) = 2x - 8 = 2(x - 4)$, więc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$. Ponadto $f'(x) < 0$ dla $x < 4$, zaś $f'(x) > 0$ dla $x > 4$, stąd w punkcie $x = 4$ funkcja f osiąga wartość najmniejszą.

Sposób drugi (z zastosowaniem własności funkcji kwadratowej). Ponieważ $f(x)$ jest funkcją kwadratową, więc sprowadzając jej wzór do postaci kanonicznej, otrzymujemy $f(x) = (x - 4)^2 + \frac{16}{3}$. Zatem $f(x)$ osiąga wartość najmniejszą dla $x = 4$.

Odpowiedź: Liczbę 8 należy przedstawić w postaci sumy dwóch składników równych 4.

Przykład 2. Prostokąt o obwodzie 48 cm obracamy dokoła jednego z boków, otrzymując w ten sposób walec. Jakie powinny być wymiary tego prostokąta, aby otrzymany walec miał największą objętość?

Rozwiązanie:

Oznaczmy długość prostokąta przez x , a szerokość przez y . Z treści zadania wynika równanie $x + y = 24$, a stąd, że $x, y \in (0; 24)$. Załóżmy, że walec otrzymaliśmy przez obrót prostokąta dokoła boku długości y (ryc. 4.57). Wtedy objętość V tego walca wyraża wzór: $V = \pi x^2 y$. Po podstawieniu do niego $y = 24 - x$ otrzymujemy: $V = \pi x^2 (24 - x)$. Należy zatem znaleźć takie $x \in (0; 24)$, dla którego funkcja $V(x) = \pi x^2 (24 - x)$ osiąga wartość największą. Jej pochodna $V'(x) = 48\pi x - 3\pi x^2$ dla $x \in (0; 24)$. Ponieważ w przedziale $(0; 24)$ $V'(x) = 0$ dla $x = 16$, a ponadto $V'(x) > 0$ dla $x \in (0; 16)$, zaś $V'(x) < 0$ dla $x \in (16; 24)$, więc $V(16)$ jest największą wartością funkcji $V(x)$ w tym przedziale. Wobec tego $x = 16$, $y = 24 - x = 8$.

Odpowiedź: Prostokąt powinien mieć następujące wymiary: długość 16 cm, a szerokość 8 cm.

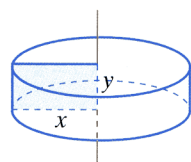
Przykład 3. Wyznacz stosunek długości promienia podstawy do długości wysokości walca, który przy danej objętości V ma najmniejszą powierzchnię całkowitą.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia standardowe: r – długość promienia podstawy walca, h – długość jego wysokości, zaś S – pole powierzchni całkowitej tego walca. Ze wzoru $V = \pi r^2 h$ wyznaczamy $h = \frac{V}{\pi r^2}$ i podstawiamy do wzoru $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$. Należy zatem wyznaczyć takie $r > 0$, dla którego funkcja $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$ osiąga wartość najmniejszą.

Jej pochodna $S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}$. Stąd: $S'(r) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r^3 - 2V = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Ponieważ jednocześnie $S'(r) < 0$ dla $r < \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ oraz $S'(r) > 0$ dla $r > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, więc dla $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ funkcja $S(r)$ osiąga wartość najmniejszą. Z równości $h = \frac{V}{\pi r^2}$ obliczamy $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$:

$$\frac{r}{h} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\pi}{4V}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}.$$



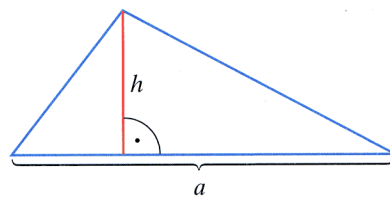
Ryc. 4.57.

Odpowiedź: Szukany stosunek długości promienia podstawy walca do długości jego wysokości wynosi $\frac{1}{2}$.

Przykład 4. Spośród wszystkich trójkątów o danej sumie długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok wybierz trójkąt o największym polu.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia jak na rycinie 4.58. Mając daną sumę $a + h = d$, obliczamy $h = d - a$ i podstawiamy do wzoru na pole trójkąta: $S = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} a (d - a)$. Należy więc wyznaczyć taką wartość $a \in (0; d)$, dla której funkcja $S(a) = \frac{1}{2} a (d - a) = -\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} da$ osiąga wartość największą. Mamy $S'(a) = -a + \frac{1}{2} d$, więc $S'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{d}{2}$, a ponadto: $S'(a) > 0$, gdy $a \in (0; \frac{d}{2})$, zaś $S'(a) < 0$ dla $a \in (\frac{d}{2}; d)$. Zatem funkcja $S(a)$ osiąga w punkcie $a = \frac{d}{2}$ wartość maksymalną. Wobec tego: $a = \frac{d}{2}$ oraz $h = \frac{d}{2}$.



Ryc. 4.58.

Odpowiedź: Poszukiwanym trójkątem jest trójkąt, którego podstawa i wysokość opuszczone na tę podstawę są równej długości.

Uwaga. Zadanie to można rozwiązać bez rachunku pochodnych, korzystając (podobnie jak w przykładzie 1. z własności funkcji kwadratowej.

Przykład 5*. Dany jest ostrosłup $SABCD$, którego podstawą jest prostokąt $ABCD$. W ostrosłupie tym krawędzie: AB , SA , SB , SC i SD są danej długości a . Dla jakiej długości krawędzi BC objętość tego ostrosłupa jest największa?

Rozwiązanie:

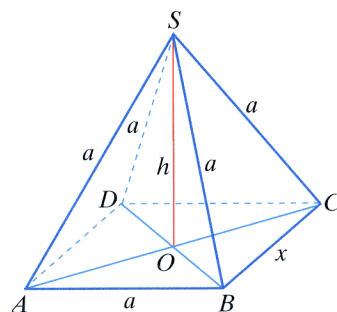
Połączmy odcinkiem wierzchołek S z punktem O przecięcia się przekątnych podstawy $ABCD$ danego ostrosłupa (ryc. 4.59).

Z przystawiania trójkątów SAO , SBO , SCO i SDO (cecha BBB) wynika, że SO jest wysokością rozważanego ostrosłupa. Oznaczmy jej długość przez h , a szukaną długość krawędzi BC przez x . Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkątów ABC i SOC otrzymujemy: $OC^2 = \frac{1}{4} AC^2 = \frac{1}{4} (a^2 + x^2)$, $h^2 = a^2 - OC^2 = a^2 - \frac{1}{4} (a^2 + x^2) = \frac{1}{4} (3a^2 - x^2)$, skąd $h = \frac{1}{2} \sqrt{3a^2 - x^2}$ dla $x \in (0; a\sqrt{3})$. Po podstawieniu h do wzoru na objętość V danego ostrosłupa otrzymujemy:

$$V = \frac{1}{3} a \cdot x \cdot h = \frac{1}{3} \cdot a \cdot x \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3a^2 - x^2} = \frac{1}{6} ax \sqrt{3a^2 - x^2}.$$

Należy zatem wyznaczyć taką liczbę $x \in (0; a\sqrt{3})$, dla której funkcja $V(x) = \frac{1}{6} ax \sqrt{3a^2 - x^2}$ osiąga wartość największą.

Zauważmy, że dla $x \in (0; a\sqrt{3})$ wzór funkcji $V(x)$ można zapisać następująco: $V(x) = \frac{1}{6} a \sqrt{x^2(3a^2 - x^2)}$. Ponieważ wyrażenie $x^2(3a^2 - x^2)$ przyjmuje dla $x \in (0; a\sqrt{3})$ wartości



Ryc. 4.59.

dotąd, zaś funkcja $f(x) = \sqrt{x}$ jest rosnąca w zbiorze \mathbf{R}_+ liczb rzeczywistych dodatnich, więc aby znaleźć $x \in (0; a\sqrt{3})$, dla którego funkcja $V(x)$ osiąga wartość największą, wystarczy, że znajdziemy takie x , dla którego funkcja $g(x) = x^2(3a^2 - x^2)$ osiąga wartość największą (funkcja $V(x)$ jest iloczynem liczby $\frac{1}{6}a$ i funkcji $f(g(x))$, tzn. $V(x) = \frac{1}{6}af(g(x))$).

Pochodna funkcji $g(x)$ wynosi: $2x(3a^2 - x^2) + x^2(-2x) = 2x(3a^2 - 2x^2) = 2x(a\sqrt{3} + x\sqrt{2})(a\sqrt{3} - x\sqrt{2})$ dla $x \in (0; a\sqrt{3})$. Zatem $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, a ponadto $g'(x) > 0$ dla $x \in (0; \frac{a\sqrt{6}}{2})$, zaś $g'(x) < 0$ dla $x \in (\frac{a\sqrt{6}}{2}; a\sqrt{3})$. Stąd wynika, że dla $x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ funkcja $g(x)$ osiąga maksimum lokalne i jest ono wartością największą funkcji $g(x)$ w przedziale $(0; a\sqrt{3})$, gdyż funkcja $g(x)$ w przedziale $(0; \frac{a\sqrt{6}}{2})$ rośnie, a w przedziale $(\frac{a\sqrt{6}}{2}; a\sqrt{3})$ maleje. Ponadto w całym przedziale $(0; a\sqrt{3})$ funkcja $g(x)$ jest ciągła (bo jest w nim różniczkowalna) oraz $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a\sqrt{3}^-} g(x) = 0$.

Odpowiedź: Objętość tego ostrosłupa jest największa, jeśli jego krawędź BC ma długość $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.



Pytania i zadania

- Liczbę 6 przedstaw w postaci różnicy takich dwóch liczb, aby ich iloczyn był najmniejszy.
- Który z prostokątów o obwodzie 36 cm ma: a) największe pole, b) najkrótszą przekątną?
- Prostopadłościenny basen o podstawie kwadratowej ma objętość 32 m³. Jakie powinien mieć wymiary, aby jego powierzchnia całkowita była najmniejsza?
- Puszka w kształcie walca ma objętość 54π . Wyznacz takie wymiary tej puszk, dla których będzie ona miała najmniejsze pole powierzchni całkowitej.
- Spośród wszystkich trapezów, których ramiona i krótsza podstawa mają długość 10 cm, wyznacz ten o największym polu.
- Obwód trójkąta równoramiennego wynosi 18 cm. Jakie powinny być boki tego trójkąta, aby objętość bryły powstałej z jego obrotu dokoła podstawy była największa?
- Z kwadratowego arkusza papieru o boku długości a wycięto siatkę czworokątnego ostrosłupa prawidłowego tak, że rogi arkusza sklejają się w wierzchołek ostrosłupa. Jaką długość powinna mieć krawędź podstawy tego ostrosłupa, aby jego objętość była największa?
- * W kulę o promieniu 3 wpisano prawidłowy ostrosłup trójkątny. Jaka powinna być wysokość tego ostrosłupa, aby jego objętość była największa?
- Kwadrat o boku a jest podstawą ostrosłupa prawidłowego o wysokości h . Spośród wszystkich prostopadłościanów, których jedna podstawa jest zawarta w podstawie ostrosłupa, a wierzchołki przeciwległej podstawy należą do krawędzi bocznych tego ostrosłupa, wyznacz ten, który ma największą objętość.

V. Elementy geometrii przestrzennej (stereometrii)

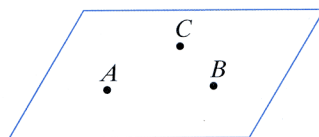
Rozdział ten poświęcimy graniastosłupom, ostrosłupom i bryłom obrotowym. Poszczególnym wiadomościom na ich temat, zdobyte w gimnazjum. Przeprowadzimy też dowody niektórych twierdzeń, które wtedy były przyjęte bez uzasadnienia.

Przedtem jednak przypomnijmy i uporządkujmy podstawowe własności i twierdzenia geometrii przestrzennej.

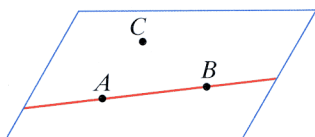
1. Przypomnienie wiadomości

Podstawowe własności przestrzeni

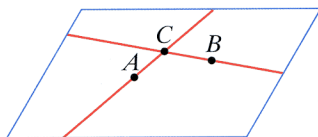
1. W przestrzeni istnieje co najmniej jedna płaszczyzna. Żadna płaszczyzna nie wypełnia całej przestrzeni, co oznacza, że w przestrzeni dla każdej płaszczyzny znajduje się co najmniej jeden punkt, który na niej nie leży.
2. Na każdej płaszczyźnie w przestrzeni zachodzą wszystkie twierdzenia geometrii płaszczyzny (planimetrii).
3. Przez każde trzy punkty przestrzeni nieleżące na jednej prostej przechodzi jedna płaszczyzna. Inaczej mówiąc: każde trzy niewspółliniowe punkty przestrzeni wyznaczają jedną płaszczyznę (ryc. 5.1). Stąd wnioskujemy, że jedną płaszczyznę wyznaczają:
 - a) prosta i punkt nieleżący na niej (ryc. 5.2),
 - b) dwie proste przecinające się (ryc. 5.3),
 - c) dwie proste równoległe i rozłączne (ryc. 5.4).



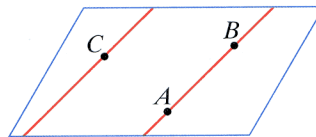
Ryc. 5.1.



Ryc. 5.2.

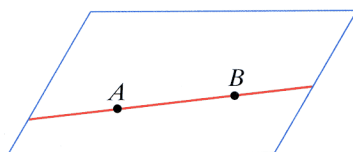


Ryc. 5.3.



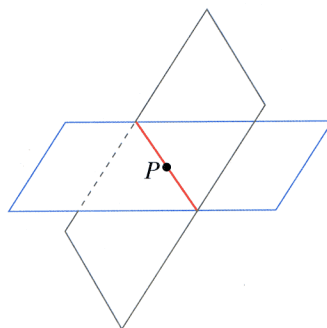
Ryc. 5.4.

4. Prosta mająca dwa punkty wspólne z płaszczyzną leży na tej płaszczyźnie (ryc. 5.5).



Ryc. 5.5.

5. Jeżeli dwie różne płaszczyzny mają punkt wspólny, to przecinają się wzdłuż prostej przechodzącej przez ten punkt (ryc. 5.6).

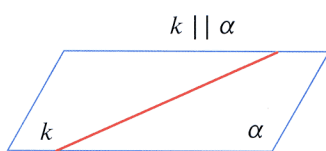


Ryc. 5.6.

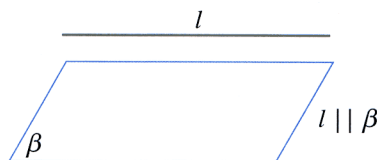
Płaszczyzny oznaczać będziemy małymi literami alfabetu greckiego: α , β , γ itp., proste – małymi literami alfabetu łacińskiego: a , b , c , k , l , m itp., a punkty – dużymi literami tego alfabetu: A , B , C , P , Q itp. (jak w planimetrii).

Wzajemne położenie prostej i płaszczyzny w przestrzeni

Gdy prosta leży na płaszczyźnie albo nie ma z tą płaszczyzną punktów wspólnych, mówimy, że ta prosta jest **równoległa** do tej płaszczyzny (ryc. 5.7 i 3.8).



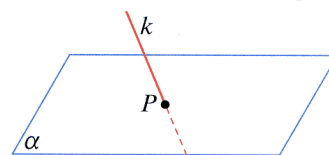
Ryc. 5.7.



Ryc. 5.8.

Wniosek. Prosta równoległa do płaszczyzny albo nie ma z tą płaszczyzną punktów wspólnych, albo ma z nią co najmniej dwa punkty wspólne.

Gdy prosta ma jeden punkt wspólny z płaszczyzną, wówczas mówimy, że prosta **przecina** (albo przebiega) płaszczyznę w tym punkcie (ryc. 5.9).



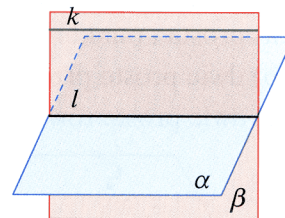
Ryc. 5.9.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Prosta k , równoległa do prostej l leżącej na płaszczyźnie α , jest równoległa do tej płaszczyzny (ryc. 5.10).

Dowód. Jeżeli prosta k leży na płaszczyźnie α , to tezę mamy. Załóżmy zatem, że prosta k nie leży na tej płaszczyźnie. Proste k i l jako równoległe wyznaczają pewną płaszczyznę β . Prosta l jest wtedy wspólną prostą tych płaszczyzn. Gdyby więc prosta k miała punkt wspólny z płaszczyzną α , musiałby to być punkt prostej l , co jest niemożliwe (proste k i l są rozłączne).



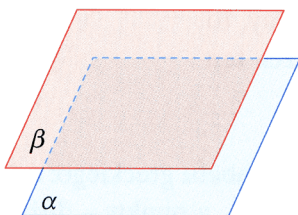
Ryc. 5.10.

Wniosek. Przez każdy punkt przestrzeni można przeprowadzić nieskończenie wiele prostych równoległych do danej płaszczyzny.

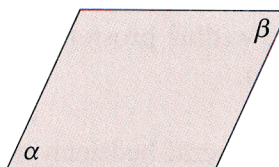
Wzajemne położenie dwóch płaszczyzn

Dwie płaszczyzny w przestrzeni mogą:

– być równoległe, co zachodzi, gdy nie mają punktu wspólnego (ryc. 5.11) lub pokrywają się (ryc. 5.12);

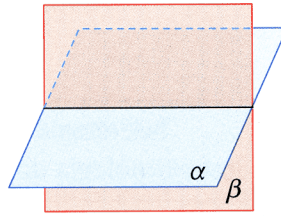


Ryc. 5.11.



Ryc. 5.12.

– przecinać się wzdłuż prostej, zwanej ich **wspólną krawędzią** (ryc. 5.13).



Ryc. 5.13.

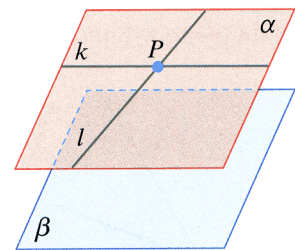
Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Jeżeli dwie przecinające się proste k i l leżące na płaszczyźnie α są równoległe do płaszczyzny β , to płaszczyzny α i β są równoległe (ryc. 5.14).

□ Dowód. Jeśli proste k i l leżą na płaszczyźnie β , to płaszczyzny α i β pokrywają się, są zatem równoległe.

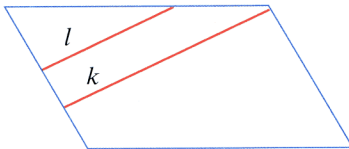
Załóżmy więc, że płaszczyzny te są różne. Gdyby płaszczyzny α i β przecinały się, to ich wspólna krawędź m byłaby równoległa do prostych k i l . To zaś oznaczałoby, że przez punkt P , w którym przecinają się proste k i l , można poprowadzić dwie proste równoległe do prostej m (prostymi równoległymi do m byłyby właśnie proste k i l), co jest, jak wiemy, niemożliwe. Zatem płaszczyzny α i β są równoległe. □



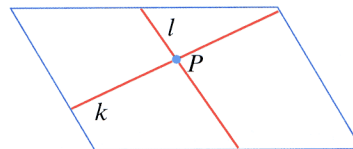
Ryc. 5.14.

Wzajemne położenie dwóch prostych w przestrzeni

Każde dwie proste leżące na jednej płaszczyźnie albo są równoległe (ryc. 5.15), albo się przecinają (ryc. 5.16).

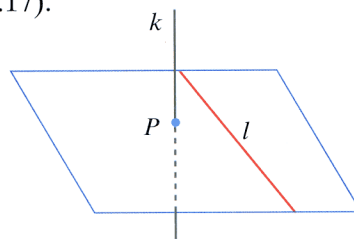


Ryc. 5.15.



Ryc. 5.16.

Dwie proste nieleżące na jednej płaszczyźnie i niemające punktu wspólnego nazywamy **prostymi skośnymi** (ryc. 5.17).



Ryc. 5.17.

Zatem każde dwie proste w przestrzeni niemające punktu wspólnego są albo równoległe, albo skośne.

Zachodzi twierdzenie:

Twierdzenie

Dwie proste, z których każda jest równoległa do trzeciej prostej, są równoległe.

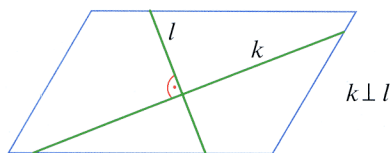
Dowód przeprowadźcie samodzielnie.

Odległością dwóch prostych skośnych jest odległość płaszczyzn równoległych, z których jedna przechodzi przez jedną z tych prostych, a druga – przez drugą z nich.

Prostopadłość prostych w przestrzeni

Prostopadłość prostych przecinających się w przestrzeni definiujemy tak, jak ich prostopadłość na płaszczyźnie:

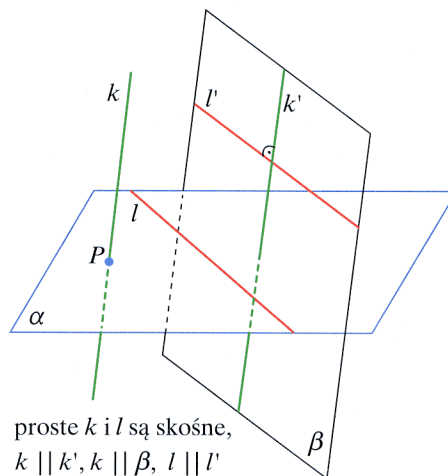
Dwie proste przecinające się w przestrzeni nazywamy **prostopadłymi**, gdy są prostopadłe na płaszczyźnie, na której leżą (ryc. 5.18).



Ryc. 5.18.

Gdy dwie proste w przestrzeni są skośne, to ich prostopadłość definiujemy następująco:

Dwie proste skośne nazywamy **prostopadłymi**, gdy są równoległe odpowiednio do prostych prostopadłych na płaszczyźnie (ryc. 5.19).

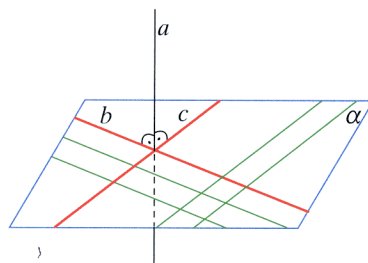


proste k i l są skośne,
 $k \parallel k', k \parallel \beta, l \parallel l'$

Ryc. 5.19.

Prosta prostopadła do płaszczyzny

Prostą nazywamy **prostopadłą do płaszczyzny** wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do każdej prostej leżącej na tej płaszczyźnie (ryc. 5.20).



Ryc. 5.20.

Zachodzi następujące twierdzenie:

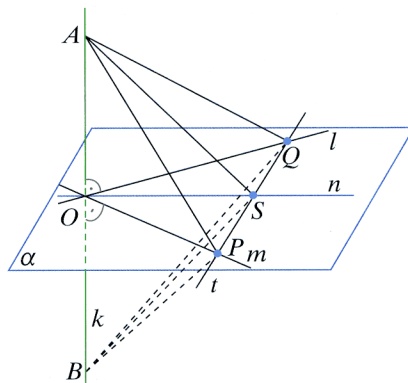
Twierdzenie

Jeżeli prosta k jest prostopadła do dwóch przecinających się prostych l i m , to jest ona prostopadła do każdej prostej na płaszczyźnie wyznaczonej przez proste l i m .

□ Dowód. Wystarczy wykazać, że prosta k jest prostopadła do prostej przechodzącej przez punkt, w którym przecinają się proste l i m (Dlaczego?). Oznaczmy ten punkt przez O i poprowadźmy przezeń jeszcze prostą n (ryc. 5.21). Poprowadźmy na płaszczyźnie α także prostą t , przecinającą proste m , n i l w punktach P , S i Q , a na prostej k obierzmy takie punkty A i B , aby punkt O był środkiem odcinka AB .

Zauważymy wówczas, że proste m i l są symetrycznymi odcinka AB (w różnych płaszczyznach), do których należą odpowiednio punkty P i Q . Stąd otrzymujemy równości:

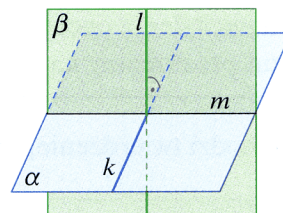
(*) $PA = PB$ i $QA = QB$, a z nich przystawanie trójkątów PAQ i PBQ (cecha BBB) – co daje równość kątów APQ i BPQ . Z kolei z równości tych kątów i równości (*) wynika przystawanie trójkątów APS i BPS (cecha BKB), a stąd równość: $SA = SB$, co oznacza, że S leży na symetralnej odcinka AB . Jest więc nią prosta n , co kończy dowód prostopadłości prostych k i n . □



Ryc. 5.21.

Płaszczyzny prostopadłe

Dwie płaszczyzny nazywamy **prostopadłymi** wtedy i tylko wtedy, gdy jedna z nich zawiera prostą prostopadłą do drugiej z nich (ryc. 5.22).

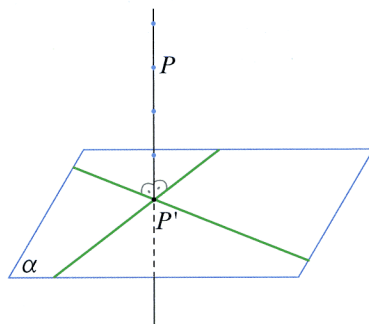


Ryc. 5.22.

Rzut prostokątny

Rzutem prostokątnym punktu P na płaszczyznę α nazywamy punkt P' , w którym płaszczyznę α przecina prosta prostopadła do niej, poprowadzona przez punkt P (ryc. 5.23).

Długość odcinka PP' jest odległością punktu P od płaszczyzny α . Punkt P' jest oczywiście rzutem prostokątnym na płaszczyznę α nie tylko punktu P , lecz także każdego innego punktu prostej PP' , jest więc rzutem prostej PP' na tę płaszczyznę. Stąd wynika, że **rzutem prostokątnym prostej na płaszczyznę**, do której jest ona prostopadła, jest punkt.



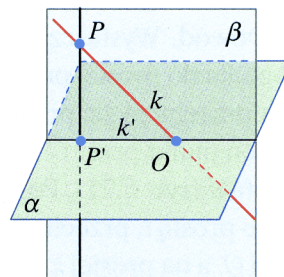
Ryc. 5.23.

Można udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Jeżeli prosta nie jest prostopadła do płaszczyzny, to jej rzutem prostokątnym na tę płaszczyznę jest prosta.

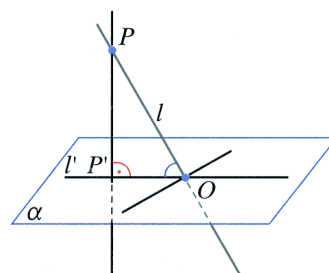
W tym celu wystarczy rozważyć prostą k spełniającą założenia twierdzenia i przechodzącą przez punkt P , którego rzutem prostokątnym na płaszczyznę α jest punkt P' (ryc. 5.24). Widzimy, że płaszczyzna β wyznaczona przez przecinające się proste PP' i k jest prostopadła do płaszczyzny α . Wspólna krawędź k' płaszczyzn α i β jest wówczas rzutem prostej k na płaszczyznę α .



Ryc. 5.24.

Kąt prostej z płaszczyzną

Prosta prostopadła do płaszczyzny tworzy z każdą prostą na tej płaszczyźnie kąt prosty. Gdy prosta l przecina płaszczyznę α , lecz nie jest do niej prostopadła, to nazywamy ją **pochyłą**. Tworzy ona różne kąty z prostymi przechodzącymi przez punkt O , będący jej punktem wspólnym z płaszczyzną. Jedną z tych prostych jest prosta l' – rzut prostokątny prostej l na tę płaszczyznę (ryc. 5.25).



Ryc. 5.25.

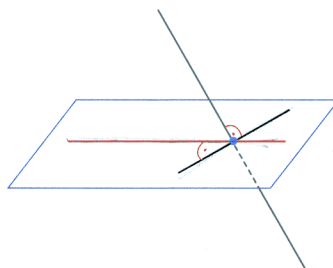


Kątem nachylenia pochyłej do płaszczyzny nazywamy kąt ostry, utworzony przez pochyłą i jej rzut prostokątny na tę płaszczyznę (ryc. 5.25).

Zachodzi twierdzenie, zwane **twierdzeniem o trzech prostopadłych**:

Twierdzenie

Jeżeli prosta leżąca na płaszczyźnie i przechodząca przez punkt przecięcia pochyłej z płaszczyzną jest prostopadła do rzutu prostokątnego pochyłej, to jest prostopadła do tej pochyłej (ryc. 5.26).



Ryc. 5.26.

□ Dowód. Oznaczmy punkt przecięcia pochyłej l i płaszczyzny α przez O , rzut prostokątny prostej l na płaszczyznę α – przez l' , a prostą przechodzącą na płaszczyźnie α przez punkt O niech będzie prosta k (ryc. 5.27).

Mamy wykazać, że jeśli $k \perp l'$ to $k \perp l$. Obierzmy na prostej l dowolny punkt P i połączmy ten punkt i jego rzut prostokątny P' na płaszczyznę α z dowolnym punktem S prostej k . Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkątów prostokątnych: $P'O'S$, $P'O'P$ i $PP'S$ otrzymujemy odpowiednio równości:

$$(1) P'S^2 = P'O^2 + SO^2;$$

$$(2) PO^2 = P'O^2 + PP'^2;$$

$$(3) PS^2 = PP'^2 + P'S^2.$$

Z równości tych wynika, że:

$$PS^2 = PO^2 - P'O^2 + P'O^2 + SO^2 = PO^2 + SO^2, \text{ czyli } PS^2 = PO^2 + SO^2.$$

Ostatnia równość dowodzi (na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa), że trójkąt POS jest prostokątny, o kącie prostym przy wierzchołku O . Kończy to dowód prostopadłości prostych k i l . □

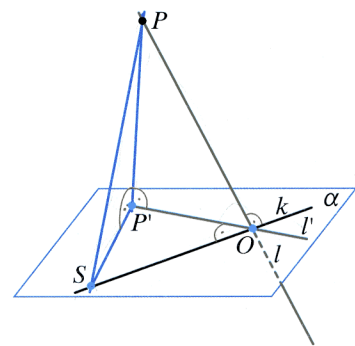
Uwaga. Zachodzi również twierdzenie odwrotne: Jeżeli $k \perp l$, to $k \perp l'$. Jego dowód (analogiczny do przedstawionego wyżej) możecie przeprowadzić samodzielnie.

Kąt dwuścienny

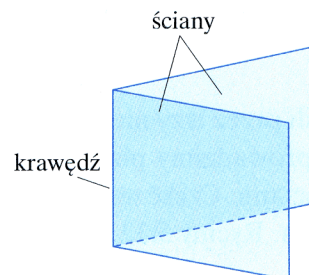
Kątem dwuściennym nazywamy figurę utworzoną przez dwie półpłaszczyzny o wspólnej krawędzi i każdą z dwóch części, na które te półpłaszczyzny rozcinają przestrzeń.

Model kąta dwuściennego otrzymamy, zginając kartkę papieru wzdłuż narysowanej na niej prostej (ryc. 5.28). Zgięte części kartki możemy sobie wyobrazić jako półpłaszczyzny o wspólnej krawędzi. Nazywamy je **ścianami** kąta dwuściennego.

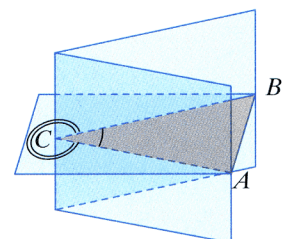
Rycina 5.29 przedstawia **kąt liniowy** ACB kąta dwuściennego. Jego ramionami są półproste, wzdłuż których przecina ściany danego kąta dwuściennego płaszczyzna prostopadła do jego krawędzi. **Miarą kąta dwuściennego** jest miara jego kąta liniowego. Kąt dwuścienny, którego ściany są prostopadłe, nazywamy kątem dwuściennym prostym.



Ryc. 5.27.



Ryc. 5.28.



Ryc. 5.29.

Wielościany

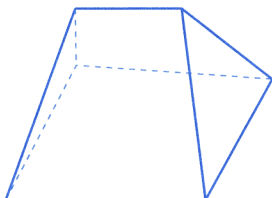


Przyjmijmy, że wielościan to bryła, której powierzchnię tworzą wielokąty o następujących własnościach:

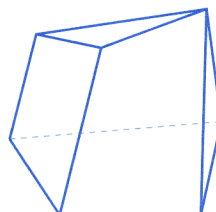
- każde dwa z nich albo są rozłączne, albo mają wspólny bok lub wspólny wierzchołek i nie leżą w jednej płaszczyźnie;
- każdy bok któregośkolwiek z tych wielokątów jest wspólnym bokiem dokładnie dwóch spośród tych wielokątów.

Wielokąty, które tworzą powierzchnię wielościanu, nazywamy jego **ścianami**, wspólne boki tych wielokątów – **krawędziami**, a wspólne wierzchołki tych wielokątów – **wierzchołkami wielościanu**. Wielościanami są na przykład: graniastosłupy (sześciiany, prostopadłościany), ostrosłupy, zaś bryły obrotowe: walec, stożek i kula nie są wielościanami.

Nazwa wielościanu wywodzi się zazwyczaj od liczby jego ścian, mamy zatem: czworościany, pięćościany, sześćościany, ośmiościany, dwunastościany, dwudziestościany itp. Na rycinie 5.30 widzimy pięćościan, którego powierzchnię tworzą dwa trójkąty i trzy czworokąty, a rycina 5.31 przedstawia sześćościan, mający dwie ściany trójkątne i cztery czworokątne.

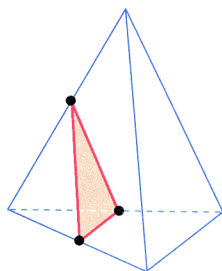


Ryc. 5.30.

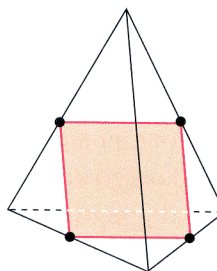


Ryc. 5.31.

Jeśli przez trzy niewspółliniowe punkty wielościanu nienależące do jednej jego ściany poprowadzimy płaszczyznę, to będzie ona miała punkty wspólne z wnętrzem tego wielościanu. Część wspólną takiej płaszczyzny i wielościanu nazywamy jego **przekrojem płaskim**. Ryciny 5.32 i 5.33 przedstawiają przekroje płaskie czworościanu:

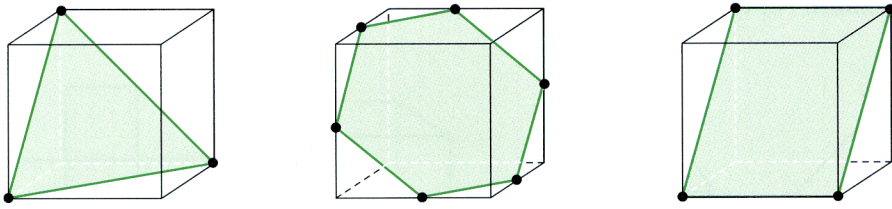


Ryc. 5.32.



Ryc. 5.33.

Niżej, na rycinie 5.34, widzimy przekroje płaskie sześcianu:

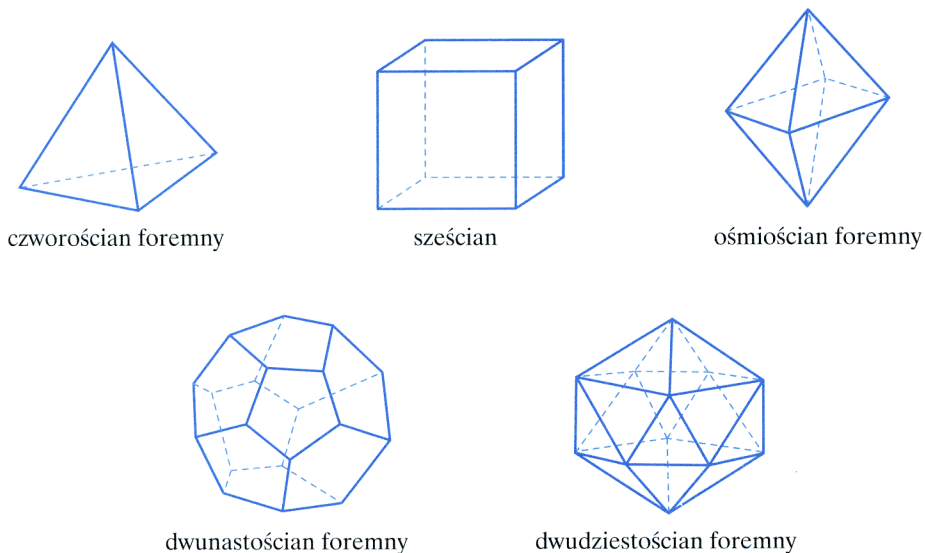


Ryc. 5.34.

Wielościan, który jest figurą wypukłą, czyli figurą zawierającą każdy odcinek o końcach w punktach tej figury, nazywamy **wielościanem wypukłym**. Ma on następujące własności:

- każda jego ściana jest wielokątem wypukłym,
- każdy jego przekrój jest wielokątem wypukłym,
- leży po jednej stronie wyznaczonej płaszczyzną każdej jego ściany.

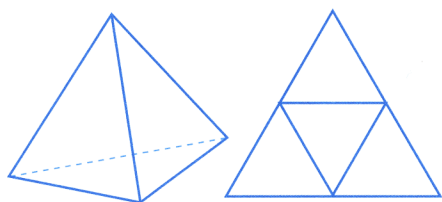
Wielościan wypukły, którego wszystkie ściany są przystającymi wielokątami foremnymi i którego każdy wierzchołek należy do tej samej liczby ścian, nazywamy **wielościanem foremnym** (bryłą platońską). Istnieje pięć wielościanów foremnych:



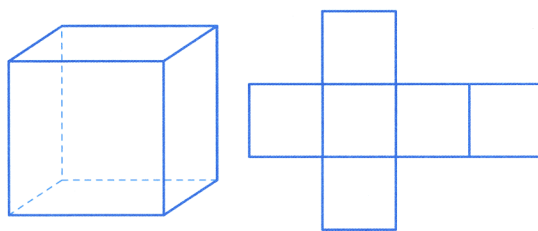
Ryc. 5.35.

Uwaga. Wielościany foremne znali już pitagorejczycy w VI wieku p.n.e. i pod postaciami sześcianu, ośmiościanu, czworościanu i dwudziestościanu wyobrażali cztery żywioły: ziemię, powietrze, ogień i wodę. Od czasów Platona za postać wszechświata uważano piąty wielościan foremny – dwunastościan.

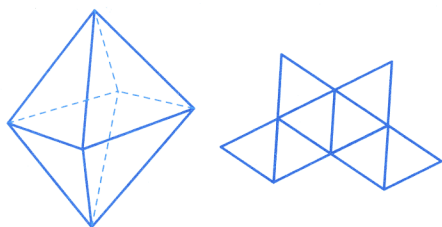
Powierzchnię wielościanu wypukłego można rozciąć wzdłuż pewnych krawędzi, a następnie rozłożyć ją na płaszczyźnie tak, że powstanie wielokąt. Wielokąt ten nazywamy **siatką wielościanu**. Na rycinie 5.36 widzimy przykłady wielościanów i ich siatek:



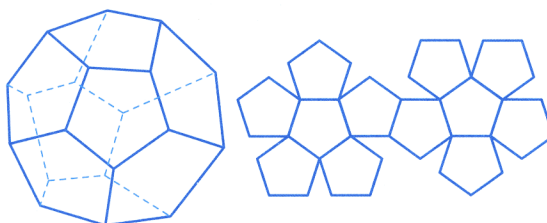
czworościan foremny i jego siatka



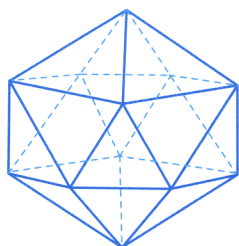
sześcian i jego siatka



ośmiościan foremny i jego siatka



dwunastościan foremny i jego siatka



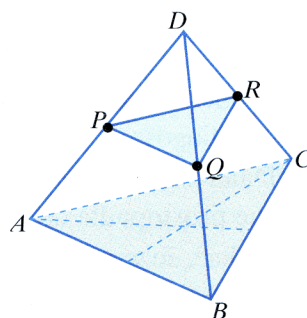
dwudziestościan foremny i jego siatka

Ryc. 5.36.

Pytania i zadania

1. Wymień poznane własności przestrzeni.
2. Jakie figury wyznaczają płaszczyznę?
3. Omów wzajemne położenie w przestrzeni:
 - a) prostej i płaszczyzny,
 - b) dwóch płaszczyzn,
 - c) dwóch prostych.
4. Jaką prostą nazywamy:
 - a) prostopadłą do płaszczyzny,
 - b) pochyłą?
5. Co to jest kąt nachylenia pochyłej do płaszczyzny?
6. Co nazywamy rzutem prostokątnym punktu na płaszczyznę?

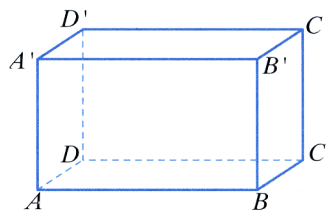
7. Jaka figura jest rzutem prostokątnym prostej na płaszczyznę?
8. Sformułuj twierdzenie o trzech prostopadłych.
9. Podaj określenie:
 - a) kąta dwuściennego i jego kąta liniowego,
 - b) miary kąta dwuściennego.
10. Co to jest:
 - a) przekrój płaski wielościanu,
 - b) siatka wielościanu?
11. Ile różnych płaszczyzn mogą wyznaczać:
 - a) trzy proste przecinające się w jednym punkcie,
 - b) cztery punkty?
12. Dlaczego stół o trzech nogach stojący na płaskiej powierzchni nie traci równowagi? Odpowiedź uzasadnij.
13. Wyjaśnij, dlaczego stół o czterech nogach stojący na płaskiej powierzchni niekiedy traci tę równowagę i dla jej poprawienia trzeba umieszczać pod jedną z nóg podkładkę?
14. Dana jest płaszczyzna α i punkt P leżący poza nią. Wskaż sposób przeprowadzenia przez punkt P płaszczyzny równoległej do płaszczyzny α .
15. Dana jest płaszczyzna α i rozłączna z nią prosta k . Wskaż sposób poprowadzenia na płaszczyźnie α prostej równoległej do prostej k .
16. Wskaż przekątną sufitu i skośną do niej przekątną podłogi.
17. Na danych dwóch prostych skośnych k i l obrano po dwa punkty odpowiednio A, B i C, D . Wykaż, że punkty te nie leżą na jednej płaszczyźnie.
18. Jedna z dwóch płaszczyzn zawiera dwie proste równoległe do drugiej płaszczyzny. Czy płaszczyzny te są równoległe?
19. Na płaszczyźnie α leży prosta k i punkt P poza nią. Przez punkt Q poza płaszczyznę α i punkt P poprowadzono prostą l . Jak są położone względem siebie proste k i l ?
- 20*. Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ wskaż w przestrzeni n prostych, z których każde dwie są skośne.
21. Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ wskaż w przestrzeni n prostych równoległych, z których żadne trzy nie leżą na jednej płaszczyźnie.
22. Udowodnij, że dwie płaszczyzny równoległe przecięte trzecią płaszczyzną przecinają się z nią wzdłuż prostych równoległych.
- 23*. W czworoscianie $ABCD$ punkty P, Q i R są środkami odpowiednio krawędzi AD, BD i CD (ryc. 5.37). Udowodnij, że płaszczyzny PQR i ABC są równoległe.



Ryc. 5.37.

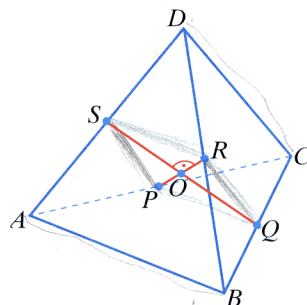
24. W prostopadłościu $ABCD A' B' C' D'$ (ryc. 5.38) wskaż:

- krawędzie równoległe;
- krawędzie skośne,
- krawędzie prostopadłe,
- ścianę równoległą do krawędzi skośnych.



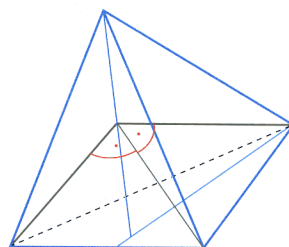
Ryc. 5.38.

25*. W czworościanie $ABCD$ krawędzie AB i CD są równej długości. Środkami krawędzi AC , BC , BD i AD są odpowiednio punkty P , Q , R i S (ryc. 5.39). Wykaż, że proste PR i QS przecinają się pod kątem prostym.



Ryc. 5.39.

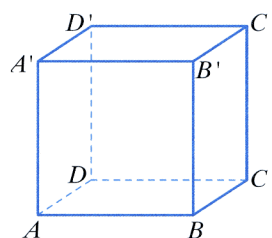
26*. W czworościanie foremnyu środek jednej z wysokości połączono odcinkami z wierzchołkami tego czworościanu nienależącymi do niej. Udowodnij, że odcinki te są parami prostopadłe (ryc. 5.40).



Ryc. 5.40.

27. Na modelu sześcianu $ABCD A' B' C' D'$ (ryc. 5.41) wśród przekątnych jego ścian wskaż:

- pary przekątnych równoległych,
- pary przekątnych skośnych.



Ryc. 5.41.

28*. Oblicz odległość pary przekątnych skośnych dwóch sąsiednich ścian sześcianu o krawędzi długości l .

29. Dana jest prosta k i punkt P leżący na tej prostej. Poprowadź przez ten punkt płaszczyznę prostopadłą do tej prostej.

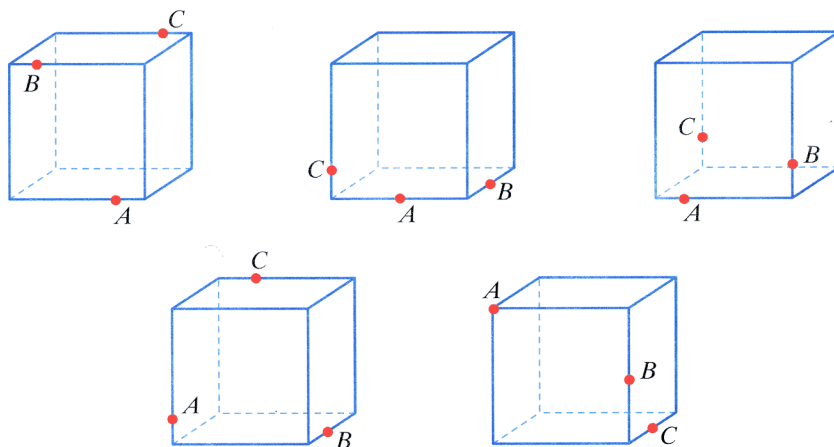
30. Wykaż, że w prostopadłościu:

- każde dwie sąsiednie ściany są prostopadłe,
- krawędź boczna jest prostopadła do przekątnej podstawy.

31. Wskaż w prostopadłościu kąty nachylenia do płaszczyzny podstawy:

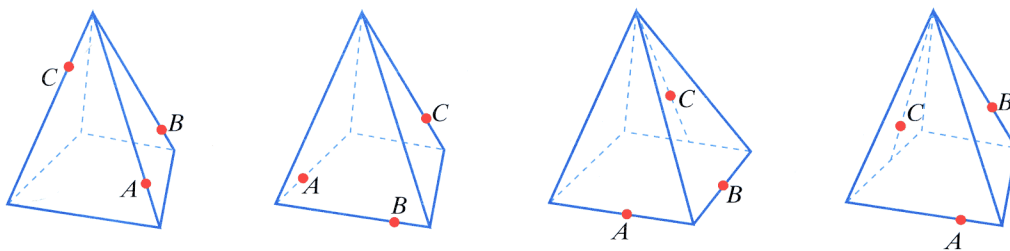
- krawędzi bocznej,
- przekątnej ściany bocznej,
- przekątnej prostopadłościu.

32. Wskaż w prostopadłościanie kąt nachylenia jego przekątnej do ścian wychodzących z tego wierzchołka, co ta przekątna.
33. Dany jest punkt P poza płaszczyzną α wyznaczoną przez dane trzy punkty A, B, C . Wykreśl kąty liniowe kątów dwuściennych płaszczyzn: ABP i α , BCP i α oraz CAP i α .
- 34*. W przestrzeni dany jest odcinek AB . Gdzie leżą w przestrzeni punkty równo odległe od końców tego odcinka?
- 35*. W przestrzeni dany jest kąt dwuścienny. Gdzie leżą w przestrzeni punkty równo odległe od ścian tego kąta?
36. Narysuj przekrój sześciangu płaszczyzną ABC :



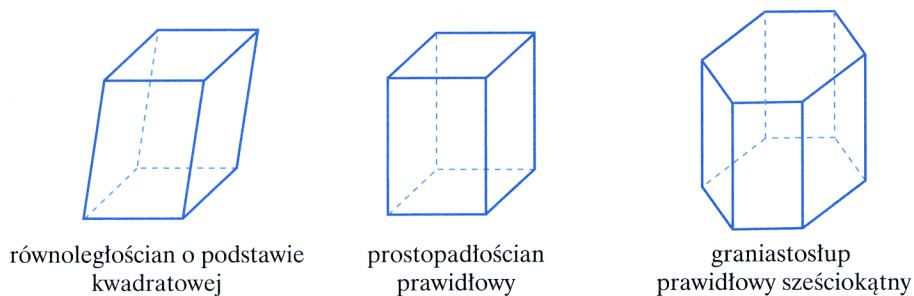
Ryc. 5.42.

37. Narysuj przekrój ostrosłupa płaszczyzną ABC :



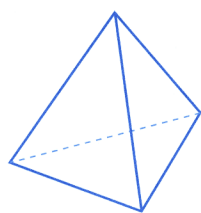
Ryc. 5.43.

38. Narysuj siatki równoległościanu o podstawie kwadratowej, graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego (ryc. 5.44):

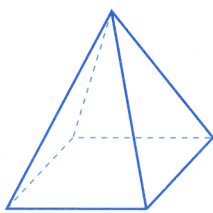


Ryc. 5.44.

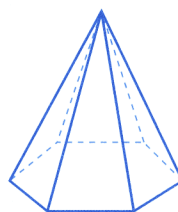
39. Narysuj siatki: ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego (ryc. 5.45).



ostrosłup prawidłowy trójkątny



ostrosłup prawidłowy czworokątny

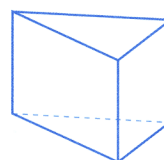
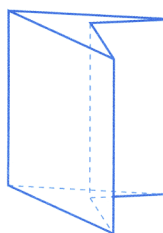
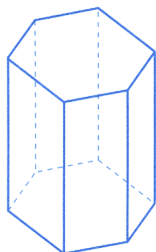
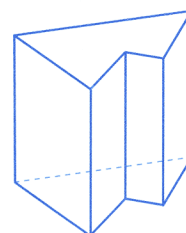
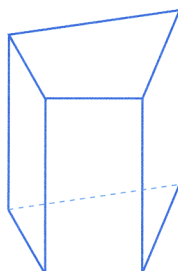
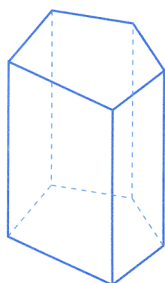


ostrosłup prawidłowy sześciokątny

Ryc. 5.45.

2. Pojęcie graniastostupa, rodzaje graniastostupów

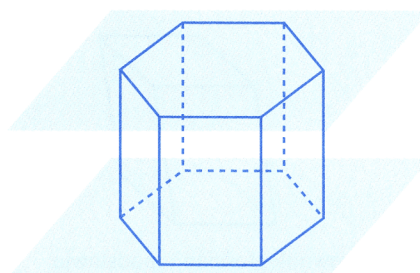
Przyjrzyjmy się poniższym wielościanom:



Ryc. 5.46.

Każdy z nich jest ograniczony z dwóch stron przystającymi wielokątami o odpowiednich bokach równoległych, a z pozostałych stron – równoległobokami. Wielościany takie nazywamy **graniastostupami**.

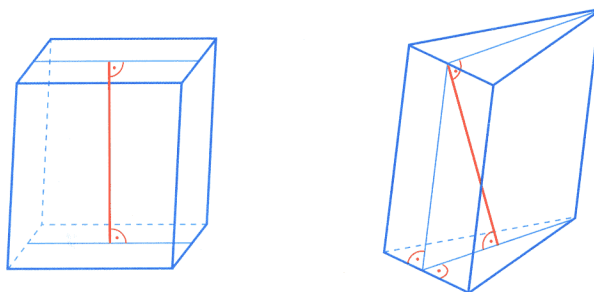
Utworzenie takich wielościanów łatwo sobie wyobrazić, mianowicie: narysujemy dowolny wielokąt i przez wszystkie jego wierzchołki poprowadzmy proste równoległe, a następnie przetnijmy je płaszczyzną równoległą do płaszczyzny tego wielokąta (ryc. 5.47).



Ryc. 5.47.

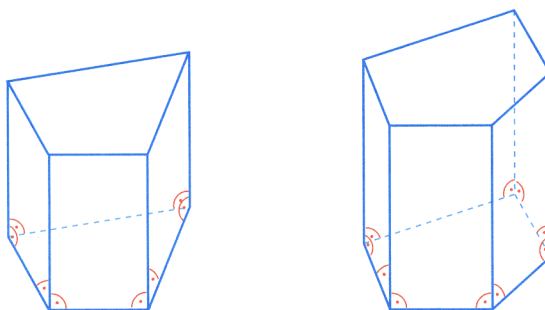
Przystające wielokąty, zawarte w równoległych płaszczyznach, nazywamy **podstawami graniastosłupa**, a powstałe równoległoboki – jego **ścianami bocznymi**. Krawędzie ścian bocznych graniastosłupa określamy mianem jego **krawędzi bocznych**, a wspólne krawędzie ścian bocznych i podstaw graniastosłupa są **krawędziami podstaw** tego graniastosłupa.

Wysokością graniastosłupa nazywamy odcinek prostopadły do obu podstaw, którego długość jest równa odległości tych podstaw (ryc. 5.48).



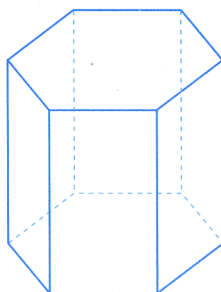
Ryc. 5.48.

Graniastosłup, którego krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw, nazywamy **graniastosłupem prostym**. W graniastosłupie prostym wszystkie ściany boczne są prostokątami, a każda krawędź boczna jest jego wysokością (ryc. 5.49).



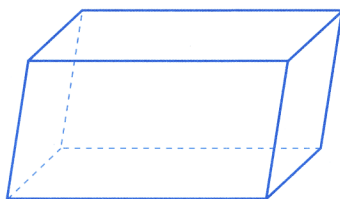
Ryc. 5.49.

Graniastosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny, nazywamy **graniastosłupem prawidłowym**. Graniastosłup, którego podstawą jest trójkąt, zwiemy graniastosłupem trójkątnym; jeśli podstawą jest czworokąt – czworokątnym itd. Na rycinie 3.50 widzimy graniastosłup prawidłowy sześciokątny.



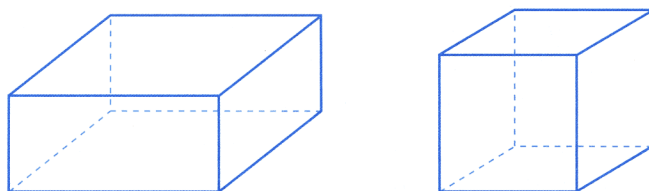
Ryc. 5.50.

Gnaniastoslup, ktorego podstawami sa rownolegoboki, nazywamy **rownolegoscianem** (ryc. 5.51).



Ryc. 5.51.

Prostopadloscian jest takim gnaniastoslupem prostym, ktorego podstawami sa prostokaty, a **sześcian** to taki prostopadloscian, ktorego kazda sciana jest kwadratem (ryc. 5.52).



Ryc. 5.52.

Polem powierzchni calkowitej gnaniastoslupa nazywamy sume pol wszystkich jego scian, za s sume pol scian bocznych okre slamy mianem **pola powierzchni bocznej**. Je sli zatem oznaczmy jako S_c – pole powierzchni calkowitej, jako S_p – pole podstawy, a jako S_b – pole powierzchni bocznej, to otrzymamy rowno sc:

$$S_c = 2S_p + S_b.$$

Je zeli gnaniastoslup jest prosty i ma wysoko sc h , a jego podstawa jest n -katem o bokach dlugosci a_1, a_2, \dots, a_n , to sciany boczne tego gnaniastoslupa sa prostokatami o bokach $a_1, h; a_2, h; \dots; a_n, h$. Stad pole powierzchni bocznej $S_b = a_1 h + a_2 h + \dots + a_n h = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) h$. Poniewaz liczba $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ jest obwodem podstawy gnaniastoslupa, wiec zachodzi twierdzenie:

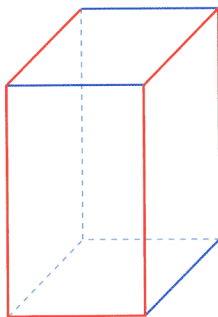
Twierdzenie

Pole powierzchni bocznej gnaniastoslupa prostego jest rowne iloczynowi obwodu podstawy i wysoko ci gnaniastoslupa.

Pytania i zadania

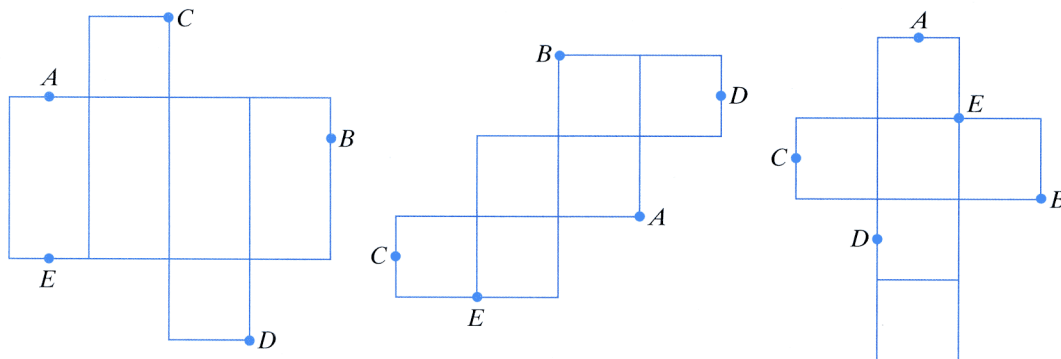
1. Podaj okre slenie gnaniastoslupa.
2. Jaki gnaniastoslup nazywamy:
 - a) gnaniastoslupem prostym;
 - b) gnaniastoslupem prawidlowym?

3. Co to jest:
 - a) równoległoscian,
 - b) prostopadłoscian,
 - c) sześcián?
4. Co określamy mianem pola:
 - a) powierzchni bocznej graniastosłupa,
 - b) powierzchni całkowitej graniastosłupa?
5. Ile wierzchołków, krawędzi i ścian ma graniastosłup:
 - a) trójkątny, b) czworokątny, c) pięciokątny,
 - d) sześciokątny, e) n -kątny?
6. Ile boków ma podstawa graniastosłupa, którego ściany boczne mają razem:
 - a) 6 przekątnych, b) 12 przekątnych, c) 20 przekątnych,
 - d) 30 przekątnych, e) 72 przekątne?
7. Jeden z dwóch graniastosłupów ma 2 razy więcej ścian i o 21 krawędzi więcej niż drugi. Jakiej wielkości są podstawami tych graniastosłupów?
8. Przekątna sześciánu jest dłuższa od przekątnej jego ściany o 3 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego sześciánu.
9. Pole powierzchni całkowitej prostopadłoscianu równa się 118 cm^2 , a jego przekątna ma długość $\sqrt{78}$ cm. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego prostopadłoscianu.
10. Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prostego, którego podstawą jest romb o przekątnych długości 12 cm i 6 cm, a przekątna ściany ma długość 22 cm.
11. Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wszystkie krawędzie są długości a .
12. Pola ścian o wspólnym wierzchołku w pewnym prostopadłoscianie wynoszą 30, 35 i 42. Oblicz długości krawędzi tego prostopadłoscianu.
13. Narysuj siatkę prostopadłoscianu o wymiarach $2 \times 3 \times 5$, który rozcięto wzdłuż krawędzi zaznaczonych na czerwono (ryc. 5.53).



Ryc. 5.53.

14. Na brzegach siatek wielościanów, które przedstawia poniższa rycina, są zaznaczone punkty A, B, C, D, E .



Ryc. 5.54.

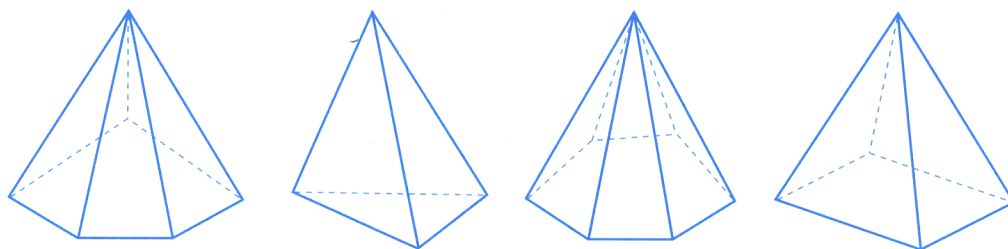
Literami A, B, C, D, E zaznacz na tych siatkach punkty, które po sklejeniu siatki nałożą się na punkty A, B, C, D, E .

15. Sześcian $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ o krawędzi długości 4 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki A, C, D_1 . Oblicz pole otrzymanego przekroju.
16. Sześcian o krawędzi długości a przecięto płaszczyzną wyznaczoną przez jego przekątną i środek jednej z jego krawędzi bocznych. Oblicz pole otrzymanego przekroju.
17. W graniastostupie prawidłowym trójkątnym $ABCA_1 B_1 C_1$ krawędź podstawy ma długość 9 cm. Oblicz pole przekroju płaszczyzną ABC_1 nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° .
18. Oblicz pole przekroju ABD_1 graniastostupa prawidłowego sześciokątnego $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ o krawędzi podstawy długości a i wysokości długości $2a$.

3. Pojęcie ostrosłupa, rodzaje ostrosłupów

Ostrosłupem nazywamy wielościan, którego jedna ściana, określana mianem **podstawy**, jest dowolnym wielokątem, a pozostałe ściany, zwane **ścianami bocznymi**, są trójkątami o wspólnym wierzchołku.

Wierzchołek ten nazywamy **wierzchołkiem ostrosłupa** (ryc. 5.55).

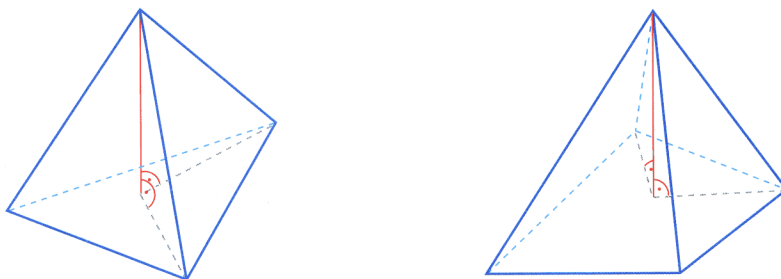


Ryc. 5.55.

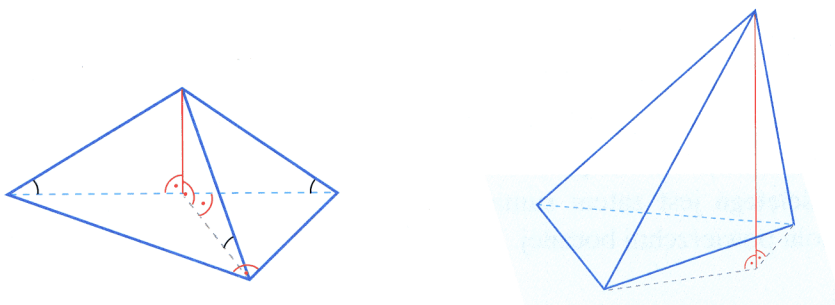
Nazwa ostrosłupa zależy od jego podstawy. Gdy jest nią trójkąt, ostrosłup zwiemy trójkątnym, gdy pięciokąt – pięciokątnym, gdy n -kątem – n -kątnym.

Ostrosłup o podstawie trójkątnej nazywamy też czworościanem, gdyż ma on cztery ściany. Ostrosłup o podstawie czworokątnej, pięciokątnej, ..., n -kątnej jest odpowiednio: pięciościanem, sześćścianem, ..., $(n + 1)$ -ścianem.

Wysokością ostrosłupa nazywamy odcinek prostej prostopadłej do płaszczyzny jego podstawy, którego jednym końcem jest wierzchołek ostrosłupa, a drugim – punkt płaszczyzny podstawy zwany **spodkiem wysokości**. Spodek wysokości ostrosłupa może się znaleźć wewnątrz podstawy (ryc. 5.56), na jej brzegu (ryc. 5.57), a także na zewnątrz niej (ryc. 5.58).



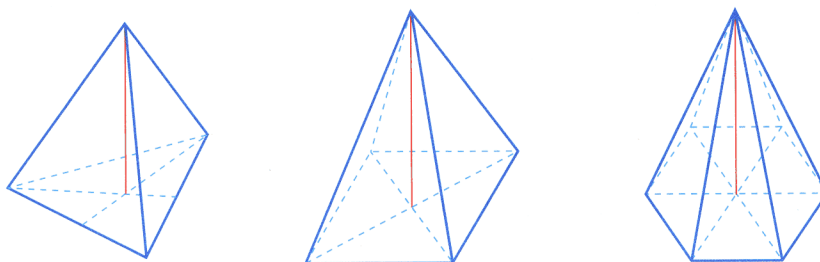
Ryc. 5.56.



Ryc. 5.57.

Ryc. 5.58.

Ostrosłup nazywamy **prawiłowym**, gdy jego podstawa jest wielokątem foremnym, a krawędzie boczne są równej długości (ryc. 5.59).



Ryc. 5.59.

W każdym ostrosłupie prawiłowym:

- ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi,
- spodkiem wysokości jest środek podstawy,
- wysokość ściany bocznej dzieli na pół krawędź podstawy.

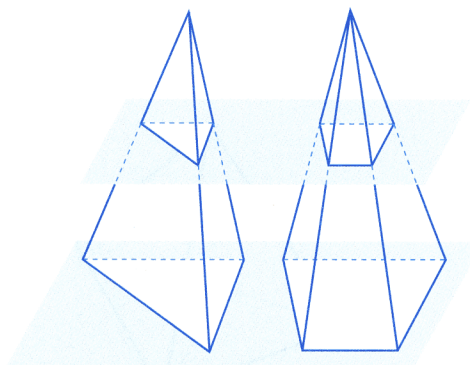
Polem powierzchni całkowitej (lub krótko: polem powierzchni) ostrosłupa nazywamy sumę pól wszystkich jego ścian. Oznaczając przez S_c pole powierzchni ostrosłupa, przez S_p – pole podstawy, a przez S_b – pole powierzchni bocznej, czyli sumę pól wszystkich ścian bocznych ostrosłupa, możemy zapisać równość:

$$S_c = S_p + S_b.$$

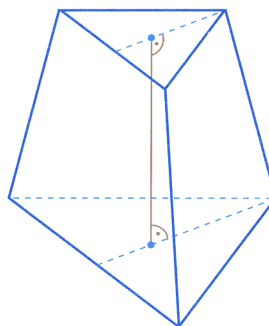
Przetnijmy ostrosłup płaszczyzną równoległą do płaszczyzny podstawy. Otrzymaną między tymi płaszczyznami część ostrosłupa nazywamy **ostrosłupem ściętym**. Na rycinie 5.60 widzimy dwa ostrosłupy ścięte: trójkątny i czworokątny. Ostrosłup ścięty ma dwie podstawy, zawarte w płaszczyznach równoległych, które są wielokątami podobnymi, i ściany boczne, które są trapezami.

Ostrosłup ścięty nazywamy **prawidłowym**, gdy jego podstawy są wielokątami foremnymi, a ściany boczne – przystającymi trapezami równoramionymi.

Wysokością ostrosłupa ściętego jest odcinek prostej prostopadłej do podstaw, którego długość równa się odległości tych podstaw (ryc. 5.61). **Polem powierzchni ostrosłupa ściętego** jest zatem suma pól podstaw i pola powierzchni bocznej.



Ryc. 5.60.



Ryc. 5.61.



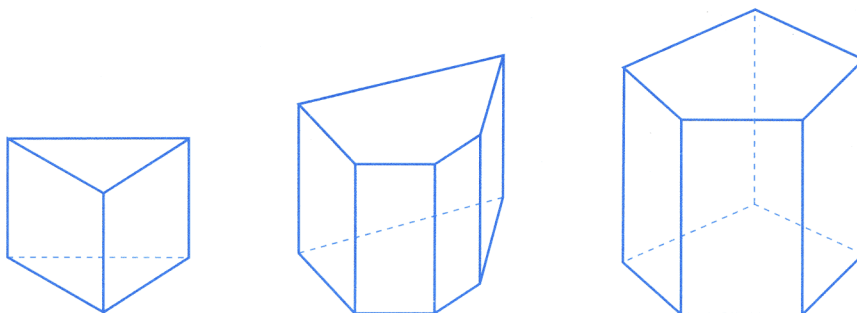
Pytania i zadania

1. Podaj określenie ostrosłupa.
2. Jaki ostrosłup nazywamy ostrosłupem prawidłowym?
3. Co to jest ostrosłup ścięty?
4. Co określamy mianem pola:
 - a) powierzchni bocznej ostrosłupa,
 - b) powierzchni całkowitej ostrosłupa?
5. Ile wierzchołków, krawędzi i ścian ma ostrosłup:
 - a) trójkątny,
 - b) czworokątny,
 - c) pięciokątny,
 - d) sześciokątny,
 - e) n -kątny?

6. Ile wierzchołków, krawędzi i ścian ma ostrosłup ścięty:
 - a) trójkątny, b) czworokątny, c) pięciokątny,
 - d) sześciokątny, e) n -kątny?
7. Ile boków ma podstawa ostrosłupa ściętego, którego ściany mają razem:
 - a) 6 przekątnych, b) 12 przekątnych, c) 20 przekątnych?
8. Narysuj siatkę ostrosłupa prawidłowego:
 - a) trójkątnego, b) czworokątnego, c) sześciokątnego.
9. Oblicz pole powierzchni:
 - a) czworościanu foremnego o krawędzi długości a ;
 - b) ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź boczna i krawędź podstawy mają długość a .
10. Oblicz pole powierzchni ostrosłupa, którego podstawą jest trójkąt równoboczny o boku a , a jedna ze ścian bocznych jest przystającym do podstawy trójkątem i jest do niej prostopadła.
- 11*. Wykaż, że pole powierzchni bocznej ostrosłupa prostego (czyli takiego, w którego podstawę można wpisać okrąg mający środek w spodku wysokości ostrosłupa) równe jest połowie iloczynu obwodu podstawy i wysokości ściany bocznej.
- 12*. Udowodnij, że pole powierzchni bocznej ostrosłupa ściętego prostego jest równe iloczynowi wysokości ściany bocznej tego ostrosłupa i połowy sumy obwodów jego obu podstaw.

4. Wzajemne położenie krawędzi i ścian w graniastosłupach i w ostrosłupach

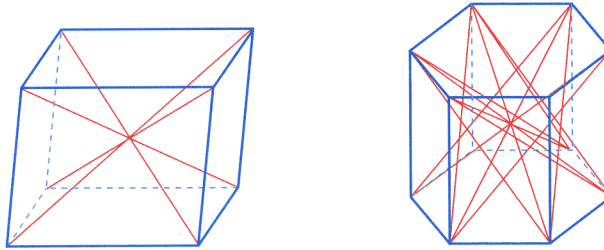
Powróćmy do graniastosłupów. Ich podstawy są, jak wiemy, przystającymi wielokątami, zawartymi w płaszczyznach równoległych, a ściany boczne – równoległobokami. Stąd wynika, że każde dwie krawędzie boczne graniastosłupa są równoległe, zaś każda krawędź podstawy jest skośna do każdej z tych krawędzi bocznych, które nie należą do wspólnej z nią ściany.



Ryc. 5.62.

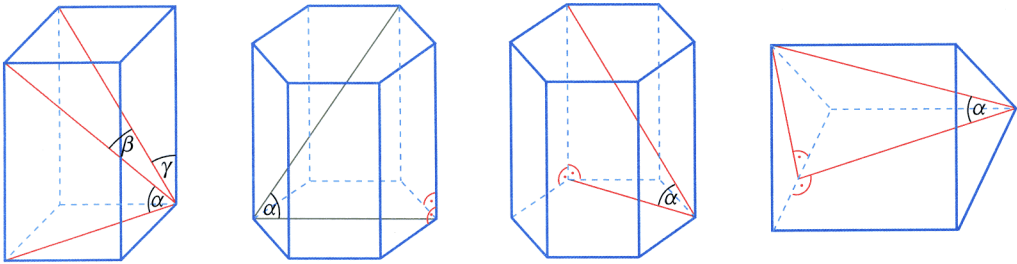
W graniastosłupach prostych krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw, a zatem – także do krawędzi podstaw.

Przekątną graniastosłupa (podobnie jak każdego wielościanu) nazywamy odcinek łączący dwa wierzchołki nienależące do tej samej ściany.



Ryc. 5.63.

Poniższa rycina przedstawia modele graniastosłupów i rozmaite kąty nachylenia.



Ryc. 5.64.

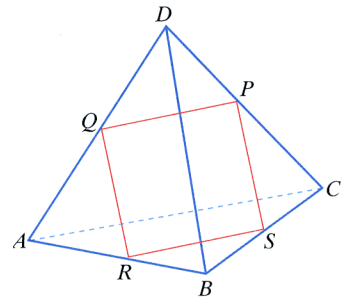
Czy umiesz określić, co to za kąty?

Przejdźmy teraz do ostrosłupów. W każdym ostrosłupie krawędzie boczne mają punkt wspólny w wierzchołku ostrosłupa. Można też wskazać w ostrosłupie pary krawędzi skośnych; w każdej takiej parze występuje krawędź podstawy i nienależąca do wspólnej z nią ściany krawędź boczna.

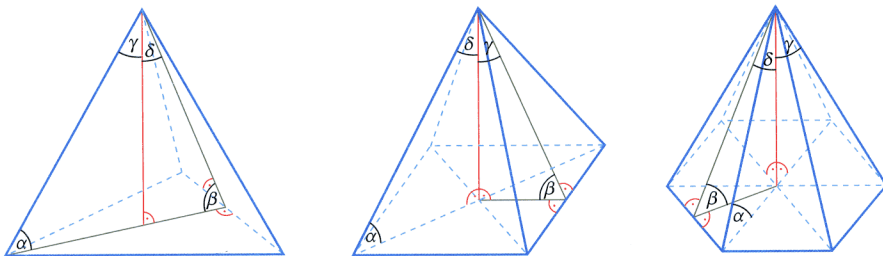
Można udowodnić, że na przykład w czworoscianie foremny każde dwie przeciwległe krawędzie są skośne i prostopadłe. W tym celu wystarczy zauważyć, rozpatrując czworoscian foremny $ABCD$ (ryc. 5.65), że krawędzie na przykład AC i BD są równoległe do odpowiednich boków czworokąta o wierzchołkach w środkach P, Q, R, S krawędzi CD, DA, AB i BC , który jest kwadratem (wykaż to!).

Na rycinie 5.66 przedstawiono modele ostrosłupów prawidłowych, w których zaznaczono rozmaite kąty nachylenia.

Czy umiałbyś nazwać te kąty?



Ryc. 5.65.



Ryc. 5.66.

Oto najważniejsze twierdzenia dotyczące ostrostupów:

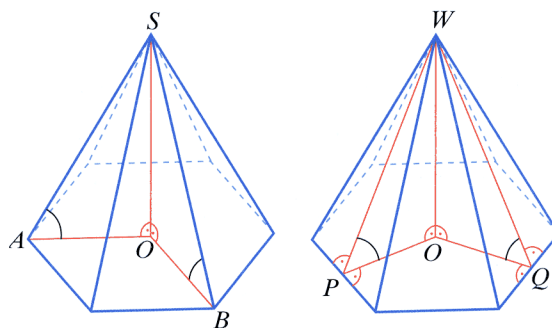
Twierdzenie 1.

W każdym ostrostupie prawidłowym równe są:

- kąty nachylenia krawędzi bocznych do podstawy;
- kąty nachylenia ścian bocznych do podstawy.

Dowód.

- Rozpatrzmy trójkąty prostokątne AOS i BOS (ryc. 5.67). Trójkąty te są przystające, gdyż $AS = BS$, $AO = BO$, a ich wspólną przyprostokątną jest SO . Stąd wynika równość kątów SAO i SBO .
- Rozważmy trójkąty prostokątne POW i QOW . Są one przystające, gdyż $PW = QW$, $PO = QO$, a ich wspólną przyprostokątną jest OW . Z przystawiania tych trójkątów wynika równość kątów OPW i OQW .



Ryc. 5.67.

Podobnie rozumując, można udowodnić prawdziwość następujących twierdzeń:

Twierdzenie 2.

Jeżeli podstawą ostrosłupa jest wielokąt foremny i wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa są nachylone do podstawy pod tym samym kątem, to ostrosłup ten jest prawidłowy.

Twierdzenie 3.

Jeżeli podstawą ostrosłupa jest wielokąt o bokach równej długości i wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa są równej długości, to ostrosłup ten jest prawidłowy.

Twierdzenie 4.

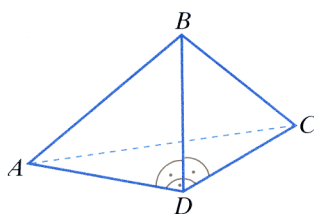
Jeżeli podstawą ostrosłupa jest wielokąt o bokach równej długości i wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa są nachylone do podstawy pod tym samym kątem, to ostrosłup ten jest prawidłowy.

Pytania i zadania

- Wskaż na modelu graniastostupa prawidłowego trójkątnego pary krawędzi:
 - równoległych,
 - prostopadłych,
 - skośnych.
- W graniastostupie prawidłowym trójkątnym przekątna ściany bocznej ma długość 2 cm i jest nachylona do podstawy pod kątem 30° . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastostupa.



3. Wskaż pary krawędzi równoległych, prostopadłych i skośnych na modelu graniastopuła prawidłowego:
 - a) czworokątnego,
 - b) pięciokątnego,
 - c) sześciokątnego.
4. Przekątna graniastopuła prawidłowego czworokątnego jest nachylona do podstawy pod kątem 30° . Krawędź podstawy ma długość 3 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastopuła.
5. Wyznacz długości przekątnych sześciokątnego graniastopuła prawidłowego o krawędzi podstawy długości 1 i o wysokości długości 2.
- 6*. Wykaż, że jeżeli równoległoscian ma wszystkie przekątne równej długości, to jest prostopadłościannem.
- 7*. Wykaż, że suma kątów między przekątnymi trzech ścian prostopadłościannu o wspólnym wierzchołku, wychodzącymi z tego wierzchołku, jest kątem półpełnym.
8. W ostrosłupie trójkątnym wszystkie kąty płaskie przy każdym wierzchołku są równe. Udowodnij, że ostrosłup ten jest czworościanem foremnym.
9. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędzie boczne długości 4 są nachylone do podstawy pod kątem 60° . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.
10. Udowodnij, że jeżeli wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa są nachylone do podstawy pod tym samym kątem, to spodek wysokości tego ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na jego podstawie.
11. Udowodnij, że jeżeli wszystkie ściany boczne ostrosłupa są nachylone do podstawy pod tym samym kątem, to spodek wysokości tego ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w jego podstawę.
12. Podstawą pewnego ostrosłupa jest równoległobok, a krawędzie boczne tego ostrosłupa są równej długości. Wykaż, że podstawa tego ostrosłupa jest prostokątem.
13. Wykreśl kąt nachylenia ściany ABC do ściany ADC w ostrosłupie trójkątnym $ABCD$, którego wszystkie kąty płaskie przy wierzchołku D są proste (ryc. 5.68).



Ryc. 5.68.

5. Związki miarowe w graniastopkach

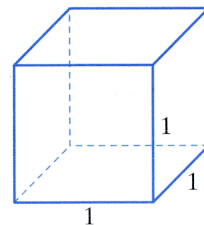
Wiemy już, jak obliczać pola powierzchni graniastopków. Teraz poświęcimy nieco uwagi zagadnieniom dotyczącym obliczaniu ich objętości. Przedtem jednak przypomnijmy wiadomości dotyczące objętości bryły i objętości prostopadłościannu.

Każda bryła wypełnia w przestrzeni pewną jej część, którą mierzymy, obliczając objętość bryły. W tym celu najpierw obieramy bryłę, której objętość oznaczać będziemy liczbą 1 i traktować jako **jednostkę objętości**. Za jednostkę tę przyjmujemy objętość sześcianu,

którego krawędź ma długość 1, na przykład 1 cm (ryc. 5.69). Wtedy jednostką objętości jest 1 cm^3 . Innymi jednostkami objętości są:

$$1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3, 1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3 \text{ itd.}$$

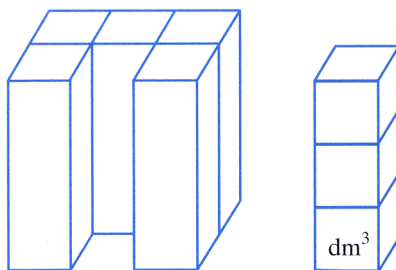
Objętość bryły jest liczbą dodatnią, otrzymaną jako wynik pomiaru objętości bryły obraną jednostką. Mierzenie objętości podlega dwóm zasadom:



Ryc. 5.69.

1. Jeżeli bryły są przystające, to mają równe objętości.
2. Jeżeli bryłę podzielimy na mniejsze bryły, to jej objętość jest równa sumie objętości jej części.

Na przykład objętość bryły ułożonej z 5 klocków, z których każdy ma objętość 3 dm^3 (ryc. 5.70), wynosi 15 dm^3 .



Ryc. 5.70.

Objętość wielościanu oznaczają będziemy literą V .

Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

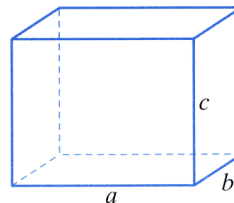
Twierdzenie 1.

Objętość prostopadłościanu równa jest iloczynowi długości jego krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka.

Twierdzenia tego nie będziemy dowodzić. Znać je jeszcze z gimnazjum.

Przy oznaczeniach jak na rycinie 5.71 treść tego twierdzenia możemy wyrazić wzorem:

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

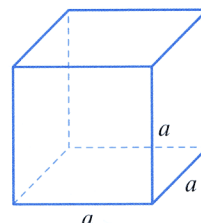


Ryc. 5.71.

Wynika z niego, że sześcian o krawędzi długości a ma objętość równą a^3 :

$$V = a^3.$$

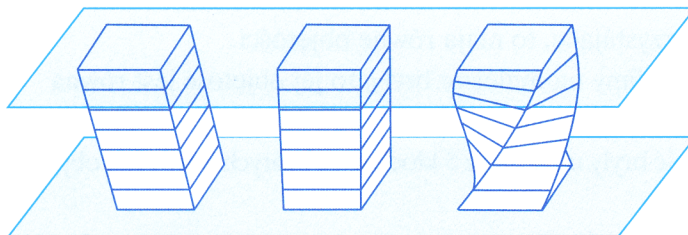
Przejdźmy teraz do określenia wzoru na objętość dowolnego graniastoslupa. Będziemy rozumować w dużym uproszczeniu, opierając się na twierdzeniu, zwanym **zasadą Cavalieriego**:



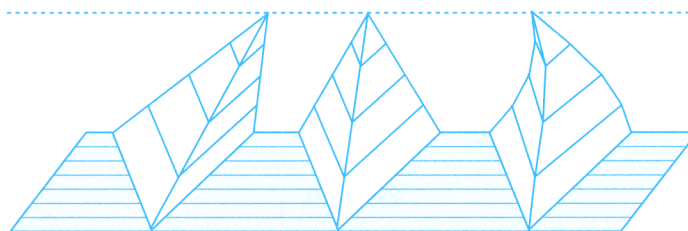
Ryc. 5.72.

Twierdzenie 2.

Jeżeli dwie bryły zawarte między dwiema równoległymi płaszczyznami mają tę własność, że ich przekroje dowolną płaszczyzną równoległą do tych dwóch płaszczyzn mają równe pola, to bryły te mają równe objętości (ryc. 5.73 i 5.74).



Ryc. 5.73.

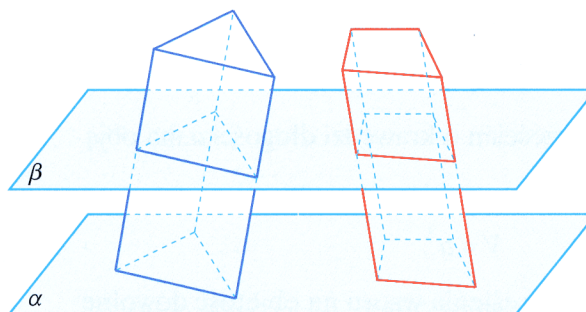


Ryc. 5.74.

Dowód pomijamy, gdyż wykracza znacznie poza ramy naszego podręcznika.
Wnioskiem z tego twierdzenia jest:

Twierdzenie 3.

Jeżeli dwa graniastosłupy mają podstawy o równych polach i wysokości o równych długościach, to mają równe objętości.



Ryc. 5.75.

□ Dowód. Rozważmy dwa graniastoslupy o podstawach leżących na płaszczyźnie α , przecięte równoległą do niej płaszczyzną β (ryc. 5.75). Ponieważ przekrój graniastoslupa płaszczyzną równoległą do płaszczyzny jego podstawy jest przystający do tej podstawy, ma więc pole równe polu tej podstawy. Zakładając zatem, że rozważane graniastoslupy mają podstawy o równych polach i wysokości o równych długościach, stwierdzamy, że ich przekroje płaszczyzną β mają równe pola. Stąd wynika, na mocy zasady Cavalieriego, że mają one także równe objętości. □

Z udowodnionego twierdzenia wynika kolejne, opisujące wzór na objętość dowolnego graniastoslupa:

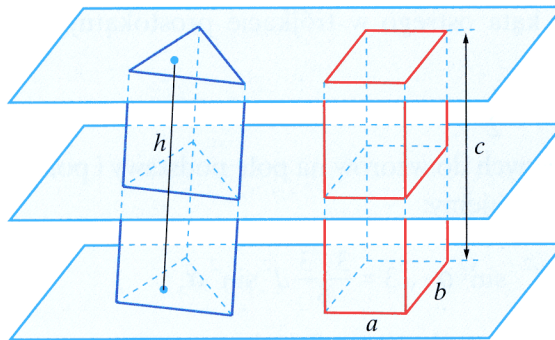
Twierdzenie 4.

Objętość dowolnego graniastoslupa równa jest iloczynowi pola jego podstawy i długości jego wysokości.

Oznaczając przez S_p pole podstawy graniastoslupa, a przez h – długość jego wysokości, treść tego twierdzenia możemy wyrazić wzorem:

$$V = S_p \cdot h.$$

□ Dowód. Zastąpmy jeden z graniastoslupów rozważanych w dowodzie twierdzenia 3. prostopadłościanem o tym samym polu podstawy i o wysokości tej samej długości (ryc. 5.76).



Ryc. 5.76.

Z twierdzenia 3. wynika, że bryły te mają równe objętości. Oznaczając objętość graniastoslupa przez V , a prostopadłościanu – przez V' , otrzymujemy równość $V = V'$. Przyjmując oznaczenia długości krawędzi tego prostopadłościanu, według ryciny 5.76, uzyskujemy równość:

$$S_p = a \cdot b \text{ i } h = c.$$

Wynika z nich, że:

$$V = V' = a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = S_p \cdot h. \quad \square$$

Wykorzystajmy zdobyte wiadomości do rozwiązania kilku zadań.

Przykład 1. Oblicz objętość graniastostupa prawidłowego trójkątnego, którego wszystkie krawędzie mają długość 4 cm.

Rozwiązanie:

Z treści zadania wynika że $S_p = \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$, a $h = 4$.

Zatem $V = S_p \cdot h = 4 \cdot \sqrt{3} \cdot 4 = 16\sqrt{3}$.

Odpowiedź: $V = 16\sqrt{3} \text{ cm}^3$.

Przykład 2. Wysokość równoległocianu wynosi 5 cm, a podstawa jest rombem o przekątnych długości 3 cm i 6 cm. Oblicz objętość tego równoległocianu (ryc. 5.78).

Rozwiązanie:

Z treści zadania wynika, że $S_p = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9$, a $h = 5$.

Wobec tego $V = S_p \cdot h = 9 \cdot 5 = 45$.

Odpowiedź: $V = 45 \text{ cm}^3$.

Przykład 3. Najdłuższa przekątna graniastostupa prawidłowego sześciokątnego ma długość d i tworzy z krawędzią boczną tego graniastostupa kąt α . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastostupa.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia jak na rycinie 5.79. Korzystając z definicji sinusa i cosinusa kąta ostrego w trójkącie prostokątnym, otrzymujemy:

$2a = d \cdot \sin \alpha$, czyli $a = \frac{1}{2} d \sin \alpha$ oraz $h = d \cdot \cos \alpha$.

Po podstawieniu tych danych do wzorów na pole podstawy i pole powierzchni bocznej uzyskujemy:

$$S_p = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{1}{8} d^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{8} d^2 \sin^2 \alpha,$$

$$S_b = 6 \cdot a \cdot h = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot d \cdot \sin \alpha \cdot d \cdot \cos \alpha = 3d^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

skąd pole powierzchni całkowitej:

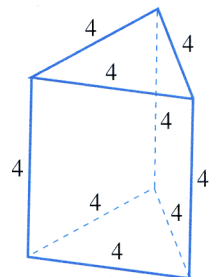
$$S_c = 2S_p + S_b = 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} d^2 \cdot \sin^2 \alpha + 3d^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{3}{4} d^2 \sin \alpha (4 \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha),$$

zaś objętość:

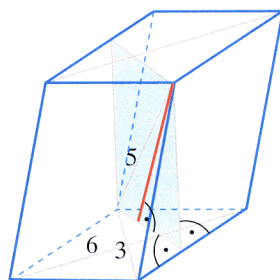
$$V = S_p \cdot h = \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot d^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot d \cdot \cos \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{8} d^3 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha.$$

Zadanie ma oczywiście sens, gdy $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$.

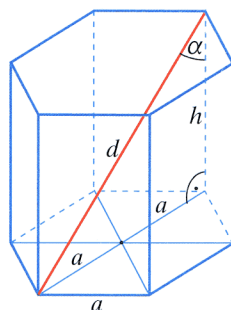
Odpowiedź: $S_c = \frac{3}{4} d^2 \sin \alpha (4 \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha)$, $V = \frac{3\sqrt{3}}{8} d^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha$, gdzie $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$.



Ryc. 5.77.



Ryc. 5.78.

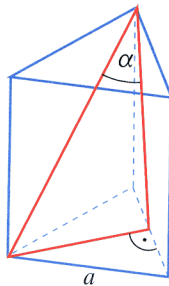


Ryc. 5.79.



Pytania i zadania

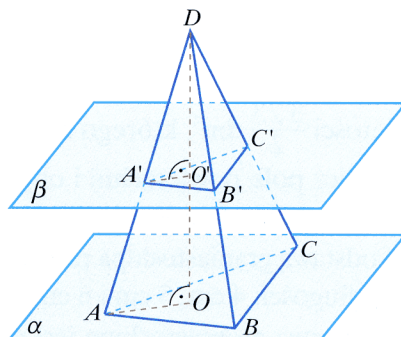
1. Oblicz pole powierzchni i objętość graniastoslupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy długości 3 cm i kącie nachylenia przekątnej do płaszczyzny podstawy równym 30° .
2. W graniastoslupie prawidłowym trójkątnym przekątna ściany bocznej ma długość 4 cm i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz pole powierzchni i objętość tego graniastoslupa.
3. Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastoslupa prawidłowego sześciokątnego o objętości $\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ dm}^3$, którego krawędź podstawy i wysokość są równej długości.
4. Oblicz pole powierzchni i objętość równoległoscianu, którego każda ściana jest rombem o boku długości 4 cm i kącie rozwartym równym 120° .
5. Podstawą graniastoslupa prostego jest trójkąt prostokątny. Przekątne ścian bocznych mają długości: 4 cm, 5 cm i 6 cm. Oblicz pole powierzchni i objętość tego graniastoslupa.
6. Podstawą graniastoslupa jest sześciokąt foremny. Krawędź boczna długości 4 cm jest nachylona do podstawy pod kątem 60° . Środek jednej podstawy jest rzutem prostokątnym wierzchołka drugiej podstawy. Oblicz pole powierzchni i objętość tego graniastoslupa.
- 7*. Wykaż, że w każdym równoległoscianie suma kwadratów długości przekątnych równa jest sumie kwadratów długości wszystkich jego krawędzi.
Wskazówka. Skorzystaj z podobnej własności równoległoboku.
8. Wyznacz długości krawędzi graniastoslupa prawidłowego sześciokątnego o polu powierzchni bocznej $S_b = 36 \text{ cm}^2$ i o objętości $V = 27\sqrt{3} \text{ cm}^3$.
- 9**. W graniastoslupie prawidłowym trójkątnym poprowadzono płaszczyznę przez krawędź podstawy dolnej i środek ciężkości podstawy górnej. Płaszczyzna ta jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45° . Przekrój tego graniastoslupa tą płaszczyzną ma pole 20 cm^2 . Oblicz objętość i pole powierzchni tego graniastoslupa.
10. Oblicz długość promienia R kuli opisanej na graniastoslupie prostym o wysokości $H = 24$ i podstawie, która jest trójkątem prostokątnym o przyprostokątnych $a = 6$ i $b = 8$.
11. W graniastoslupie prawidłowym trójkątnym o krawędzi podstawy długości a przekątna ściany bocznej jest nachylona do sąsiedniej ściany bocznej pod kątem α . Oblicz objętość tego graniastoslupa.



Ryc. 5.80.

6. Związki miarowe w ostrosłupach

Poznamy teraz wzór na objętość dowolnego ostrosłupa. Rozważmy najpierw ostrosłup trójkątny, by potem przejść do ostrosłupa o dowolnej podstawie. Będziemy rozumować, podobnie jak w podrozdziale poprzednim, opierając się na przyjętej bez dowodu zasadzie Cavalieriego. Niech $ABCD$ będzie dowolnym ostrosłupem trójkątnym. Przetnijmy go płaszczyzną β , równoległą do płaszczyzny α jego podstawy ABC . Punkty przecięcia płaszczyzny β krawędziami bocznymi AD , BD i CD oznaczmy odpowiednio przez A' , B' i C' (ryc. 5.81).



Ryc. 5.81.

Ponadto przyjmijmy jeszcze oznaczenia:

$$DO = h, DO' = h',$$

S_p – pole trójkąta ABC (podstawy),

S' – pole trójkąta $A'B'C'$ (przekroju).

Udowodnimy teraz równość:

$$(*) \quad \frac{S'}{S_p} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2.$$

Dowód. Z równoległości płaszczyzn α i β wynika równoległość par odcinków: AB i $A'B'$, BC i $B'C'$ oraz AC i $A'C'$. Z twierdzenia Talesa otrzymujemy równości:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{DB'}{DB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{DC'}{DC} = \frac{A'C'}{AC}, \text{ a stąd równości:}$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}, \text{ które dowodzą, że trójkąty } A'B'C' \text{ i } ABC \text{ są podobne. Skalą ich po-}$$

dobieństwa jest stosunek $\frac{DA'}{DA}$ (równy $\frac{h'}{h}$ – na mocy twierdzenia Talesa, zastosowanego do kątów AOD i $A'O'D$ na ryc. 5.81). Ponieważ stosunek pól figur podobnych jest równy

kwadratowi skali ich podobieństwa, więc $\frac{S'}{S_p} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$.

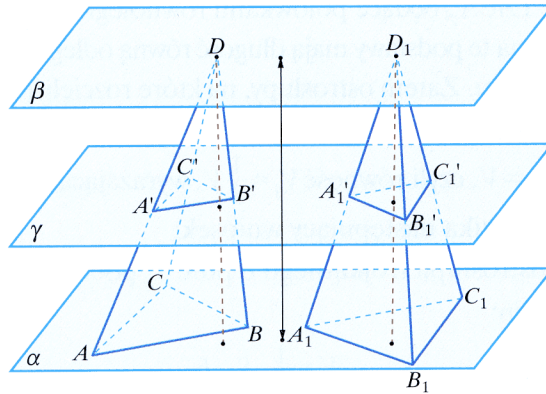
Udowodniona równość pozwala sformułować następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.

Ostrosłupy trójkątne o podstawach mających równe pola oraz o wysokościach opuszczonych na te podstawy i mających tę samą długość mają równe objętości.

Dowód. Rozważmy dwa ostrosłupy trójkątne $ABCD$ i $A_1B_1C_1D_1$ o podstawach odpowiednio ABC i $A_1B_1C_1$ leżących na płaszczyźnie α , spełniające podane w twierdzeniu założenia.

Wierzchołki D i D_1 obu ostrosłupów leżą więc na pewnej płaszczyźnie β równoległej do płaszczyzny α . Przetnijmy ostrosłupy płaszczyzną γ równoległą do płaszczyzn α i β (ryc. 5.82). Punkty jej przecięcia krawędziami bocznymi tych ostrosłupów oznaczmy odpowiednio przez A' , B' , C' i A_1' , B_1' , C_1' .



Ryc. 5.82.

Odległość płaszczyzn α i β jest równa długości wysokości h rozważanych ostrosłupów, odległość zaś płaszczyzn γ i β jest równa długości wysokości h' ostrosłupów $A'B'C'D$ i $A_1B_1C_1D_1$.

Oznaczmy pole podstaw danych ostrosłupów przez S_p , a pola ich przekrojów $A'B'C'$ i $A_1B_1C_1$ płaszczyzną γ odpowiednio przez S_1 i S_2 .

Z udowodnionego wzoru (*) otrzymujemy równości $\frac{S_1}{S_p} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 = \frac{S_2}{S_p}$, a stąd równość $S_1 = S_2$, z której z kolei wynika, na mocy zasady Cavalieriego, że rozważane ostrosłupy mają równe objętości. \square

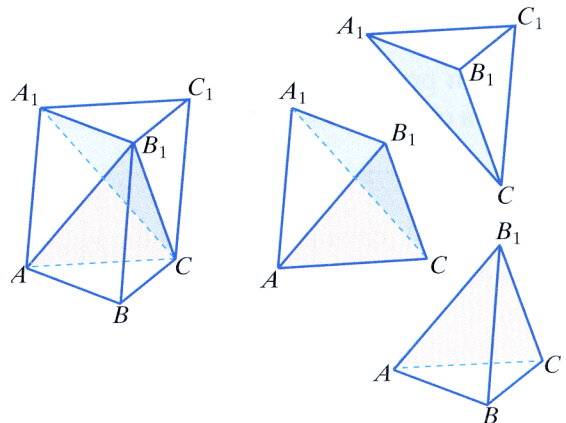
Zanim zajmiemy się wzorem na objętość dowolnego ostrosłupa, udowodnimy jeszcze jedno twierdzenie:

Twierdzenie 2.

Jeżeli ostrosłup trójkątny i graniastosłup trójkątny mają podstawy o równych polach i wysokości opuszczone na te podstawy o równych długościach, to ostrosłup ten ma objętość trzy razy mniejszą od objętości tego graniastosłupa.

\square Dowód. Rozważmy graniastosłup trójkątny $ABCA_1B_1C_1$ o podstawach ABC i $A_1B_1C_1$. Rozetnijmy go na trzy ostrosłupy trójkątne: $ABCB_1$, ACB_1A_1 i $CB_1C_1A_1$ (ryc. 5.83).

Ponieważ ostrosłupy $ABCB_1$ i $A_1B_1C_1C$ mają przystające podstawy, odpowiednio ABC i $A_1B_1C_1$, oraz wspólną z danym graniastosłupem wysokość, mają więc też równe objętości (zgodnie z twierdzeniem 1.). Dotyczy to również ostrosłupów $CB_1C_1A_1$ i ACB_1A_1 . Wystarczy za ich podstawy



Ryc. 5.83.

przyjąć trójkąty A_1C_1C i ACA_p , będące połówkami równoległoboku ACC_1A_1 . Wysokości tych ostrosłupów opuszczone na te podstawy mają długość równą odległości wierzchołka B_1 od płaszczyzny tego równoległoboku. Zatem ostrosłupy, na które rozcięliśmy nasz graniastosłup, mają równe objętości. Oznaczając je przez V_p , a objętość danego graniastosłupa przez V , otrzymamy równość $3V_p = V$, czyli równość $V_p = \frac{1}{3}V$, wyrażającą treść dowodzonej tezy. \square

Z twierdzenia tego wynika następujący wniosek:

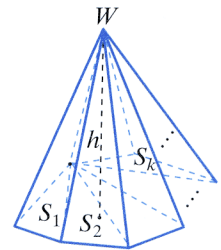
Wniosek. Objętość V ostrosłupa trójkątnego o polu S_p podstawy i wysokości mającej długość h wyraża się wzorem:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot h.$$

Rozważmy wreszcie ostrosłup, którego podstawą jest dowolny wielokąt o polu S , a wysokość niech ma długość h . Podzielmy podstawę na k trójkątów, na przykład prowadząc przekątne z jednego jego wierzchołka do pozostałych (ryc. 5.84). Jeżeli przez S_1, S_2, \dots, S_k oznaczymy pola tych trójkątów, to otrzymamy równość $S = S_1 + S_2 + \dots + S_k$.

Trójkąty te staną się podstawami ostrosłupów o wspólnym wierzchołku W danego ostrosłupa i o wspólnej jego wysokości h . Objętości V_1, V_2, \dots, V_k tych ostrosłupów wynoszą, odpowiednio: $V_1 = \frac{1}{3}S_1 \cdot h$, $V_2 = \frac{1}{3}S_2 \cdot h, \dots, V_k = \frac{1}{3}S_k \cdot h$. Ponieważ ostrosłupy te wypełniają cały nasz ostrosłup, więc jego objętość V jest równa sumie $V_1 + V_2 + \dots + V_k$. Wobec tego otrzymujemy: $V = \frac{1}{3}S_1 \cdot h + \frac{1}{3}S_2 \cdot h + \dots + \frac{1}{3}S_k \cdot h = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \dots + S_k) \cdot h = \frac{1}{3}S \cdot h$.

Tym samym udowodniliśmy twierdzenie:



Ryc. 5.84.

Twierdzenie 3.

Objętość V dowolnego ostrosłupa o polu podstawy S_p i o wysokości długości h wyraża wzór:

$$V = \frac{1}{3} S_p \cdot h.$$

Zanim przystąpimy do rozwiązywania zadań, zajmijmy się jeszcze wyprowadzeniem wzoru na objętość dowolnego ostrosłupa ściętego. Udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.

Objętość V dowolnego ostrosłupa ściętego o polach S_1 i S_2 jego podstaw i o długości h jego wysokości wyraża się wzorem:

$$V = \frac{1}{3} (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2) \cdot h.$$

□ Dowód. Rozważmy dowolny ostrosłup ścięty (na ryc. 5.85 widzimy ostrosłup sześciokątny) i uzupełnijmy go do całego ostrosłupa. Odległość jego wierzchołka od podstawy o polu S_2 oznaczmy przez h_1 . Ponieważ zgodnie ze wzorem $\frac{S'}{S_p} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$.

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{h+h_1}{h_1}\right)^2, \text{ więc } \frac{h+h_1}{h_1} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}}, \text{ skąd } h_1 = \frac{h\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}.$$

Teraz możemy obliczyć objętość V danego ostrosłupa ściętego:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S_1 \cdot (h+h_1) - \frac{1}{3} S_2 \cdot h_1 = \frac{1}{3} S_1 h + \frac{1}{3} \cdot (S_1 - S_2) \cdot h_1 = \\ &= \frac{1}{3} S_1 h + \frac{1}{3} (\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2})(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}) \cdot \frac{h\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} = \\ &= \frac{1}{3} S_1 h + \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}) \cdot h\sqrt{S_2} = \frac{1}{3} (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2) h. \quad \square \end{aligned}$$

Podrozdział ten zakończymy rozwiązaniem kilku zadań na obliczanie pól powierzchni i objętości ostrosłupów.

Przykład 1. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, wiedząc, że jego krawędź boczna ma długość 18 cm, a promień okręgu opisanego na podstawie wynosi 8 cm.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy oznaczenia:

a – długość krawędzi podstawy ostrosłupa,

b – wysokość ściany bocznej ostrosłupa,

H – wysokość ostrosłupa (ryc. 5.86),

h – wysokość podstawy ostrosłupa,

R – promień okręgu opisanego na podstawie.

Podstawa tego ostrosłupa jest trójkątem równobocznym, więc $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} R = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12$.

Stąd długość krawędzi podstawy ostrosłupa $\boxed{a = 8\sqrt{3}}$. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy ponadto: $H^2 = 18^2 - 8^2 = (18-8)(18+8) = 10 \cdot 26 = 4 \cdot 65$, a więc $\boxed{H = 2\sqrt{65}}$. Wysokość ściany bocznej ostrosłupa obliczymy również na podstawie twierdzenia Pitagorasa:

$b^2 = H^2 + 4^2 = 4 \cdot 65 + 4^2 = 4 \cdot 69$, skąd $\boxed{b = 2\sqrt{69}}$. Podstawa tego ostrosłupa ma zatem pole:

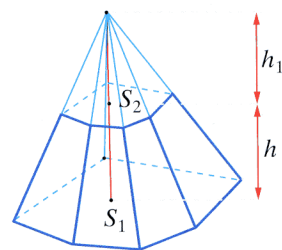
$S_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = (8\sqrt{3})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 64 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 48\sqrt{3}$, a pole jego powierzchni bocznej wynosi:

$S_b = 3 \cdot \frac{1}{2} a \cdot b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{69} = 24 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 23 = 72\sqrt{23}$. Mając te dane, możemy obliczyć

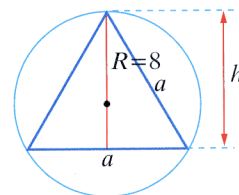
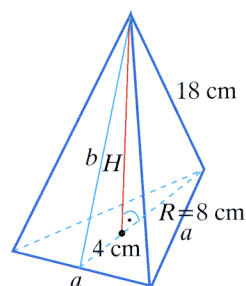
pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa $S_c = S_p + S_b = 48\sqrt{3} + 72\sqrt{23} = 24(2\sqrt{3} + 3\sqrt{23})$,

oraz jego objętość: $V = \frac{1}{3} S_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 48\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{65} = 32\sqrt{195}$.

Odpowiedź: $S_c = 24(2\sqrt{3} + 3\sqrt{23}) \text{ cm}^2$, $V = 32\sqrt{195} \text{ cm}^3$.



Ryc. 5.85.

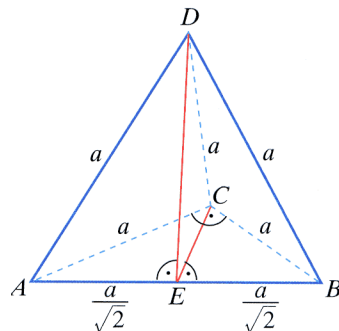


Ryc. 5.86.

Przykład 2. Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych AC i BC długości a . Krawędzie boczne tego ostrosłupa także są długości a . Oblicz objętość tego ostrosłupa i pole jego powierzchni całkowitej.

Rozwiązanie:

Sposób pierwszy. W danym ostrosłupie oznacmy przez E środek krawędzi AB podstawy ABC i połączmy go z wierzchołkami C i D (ryc. 5.87). Zauważmy, że odcinek CE jest połową przekątnej kwadratu o boku długości a , którego połową jest podstawa danego ostrosłupa. Wobec tego $CE = \frac{a}{\sqrt{2}}$.



Ryc. 5.87.

Odcinek DE jest wysokością ściany ABD , która jest trójkątem równoramiennym o podstawie AB . Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta BDE , otrzymujemy:

$$DE = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Ponieważ w trójkącie DEC mamy: $DE^2 + CE^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = a^2 = DC^2$, więc wnioskujemy, na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa, że trójkąt ten jest prostokątny o kącie prostym przy wierzchołku E . Ściana ABD jest więc prostopadła do płaszczyzny ABC danego ostrosłupa, zaś odcinek DE jest jego wysokością. Wobec tego

objętość danego ostrosłupa: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$, a pole powierzchni całkowitej

$$S_c = 2 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot a \sqrt{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a^2.$$

Odpowiedź: $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$, $S_c = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a^2$.

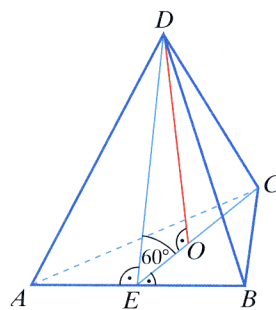
Sposób drugi. Ponieważ wszystkie krawędzie boczne tego ostrosłupa są równej długości, więc spodek jego wysokości jest środkiem okręgu opisanego na podstawie tego ostrosłupa. Skoro zaś podstawa ta jest trójkątem prostokątnym ABC o przeciwprostokątnej AB , to ów spodek jest środkiem krawędzi AB . Wobec tego ściana boczna ABD danego ostrosłupa jest prostopadła do płaszczyzny jego podstawy. Zatem trójkąt DEC (oznaczenia na ryc. 5.87) jest prostokątny, w którym $DE = EC = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Dalsze rachunki przebiegają, jak w sposobie pierwszym.

Przykład 3. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego krawędź podstawy ma długość 2 cm, a ściana boczna jest nachylna do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° .

Rozwiązanie:

Rozpatrzmy ostrosłup $ABCD$ spełniający warunki zadania (ryc. 5.88). Ponieważ jest on prawidłowy, więc:

– podstawa ABC jest trójkątem równobocznym,



Ryc. 5.88.

– ściany boczne są trójkątami równoramiennymi, nachylnymi do podstawy pod tym samym kątem. Spodek wysokości tego ostrosłupa leży na wysokości CE podstawy i dzieli ją w stosunku 2:1. Wobec tego $CE = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, $EO = \frac{1}{3} \cdot CE = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Zauważmy też, że trójkąt OED jest połową trójkąta równobocznego o boku długości $2EO = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, więc $DE = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $DO = \frac{DE\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$. Zatem objętość tego ostrosłupa: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, zaś pole jego powierzchni całkowitej: $S_c = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

Odpowiedź: $V = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$, $S_c = 3\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Przykład 4. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy i wysokości ściany bocznej długości 2. Rozwiązanie:

Niech $SABCD$ będzie prawidłowym ostrosłupem czworokątnym, którego podstawą jest kwadrat $ABCD$ (ryc. 5.89). Przetnijmy go płaszczyzną wyznaczoną przez środki P i Q krawędzi BC i AD oraz wierzchołek S tego ostrosłupa. Ponieważ ostrosłup ten jest prawidłowy, wyznaczona płaszczyzna jest prostopadła do płaszczyzny jego podstawy. Z treści zadania wynika zaś, że otrzymany przekrój PQS jest trójkątem równobocznym. Wobec tego kąt nachylenia ściany bocznej BCS (i każdej z trzech pozostałych) do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa wynosi 60° .

Przykład 5. Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, mający za podstawę trójkąt równoboczny o boku długości a . Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa wynosi $0,25\sqrt{15}a^2$. Wyznacz miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy. Rozwiązanie:

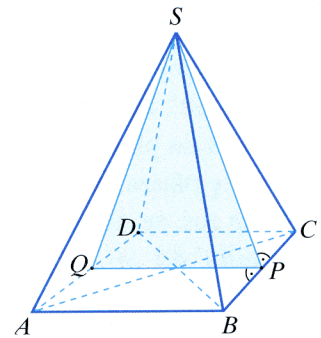
Niech $ABCD$ będzie ostrosłupem prawidłowym trójkątnym, w którym $AB = BC = CA = a$, zaś α – szukaną miarą kąta nachylenia krawędzi bocznej AD do płaszczyzny podstawy ABC (ryc. 5.90). Oczywiście $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$. Pole powierzchni bocznej

$S_b = 3 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot DE = \frac{3}{2} a \cdot DE$. Ponieważ z treści zadania wiemy, że $S_b = 0,25\sqrt{15}a^2$, mamy równanie $\frac{3}{2} a \cdot DE = 0,25\sqrt{15}a^2$, a stąd (*) $DE = \frac{1}{6}\sqrt{15}a$. Ponadto obliczamy:

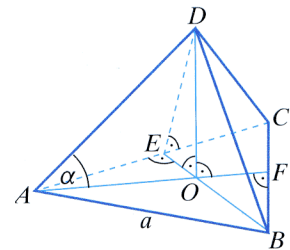
$$EO = \frac{1}{3} EB = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}, OD = AO \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3} \cdot AF \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \alpha.$$

Po podstawieniu otrzymanych wartości do równania $DE^2 = EO^2 + OD^2$, które wynika z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego DEO , otrzymujemy równość:

$$DE^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \alpha\right)^2 = \frac{a^2}{12} (1 + 4\operatorname{tg}^2 \alpha), \text{ czyli równość (**)} DE = \frac{a}{6} \sqrt{3(1 + 4\operatorname{tg}^2 \alpha)}.$$



Ryc. 5.89.



Ryc. 5.90.

Z równości (*) i (**) wynika równanie $\frac{a}{6}\sqrt{15} = \frac{a}{6}\sqrt{3(1+4\operatorname{tg}^2\alpha)}$. Rozwiązując je, uzyskujemy kolejno: $\sqrt{15} = \sqrt{3(1+4\operatorname{tg}^2\alpha)}$, $3(1+4\operatorname{tg}^2\alpha) = 15$, $1+4\operatorname{tg}^2\alpha = 5$, $4\operatorname{tg}^2\alpha = 4$, $\operatorname{tg}^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$ i ostatecznie $\alpha = 45^\circ$, bo $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$.

Odpowiedź: Szukana miara kąta nachylenia wynosi 45° .

Przykład 6. Odległość środka podstawy prawidłowego ostrosłupa czworokątnego od krawędzi bocznej wynosi 10 cm, a kąt płaski ściany bocznej przy wierzchołku ostrosłupa ma miarę 60° . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

Rozwiązanie:

Sposób pierwszy. Z treści zadania wynika, że jest to ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego wszystkie krawędzie są równej długości.

Spójrzmy na rycinę 5.91a. Mamy dane $OC = 10$ cm, $\sphericalangle ASB = 60^\circ$. Połączmy A z C . Ponieważ prosta OA jest prostopadła do płaszczyzny SOB , więc OC jest rzutem pochyłej AC na tę płaszczyznę. Z twierdzenia o trzech prostopadłych wynika zaś, że AC jest prostopadła do SB , gdyż OC jest prostopadła do SB . Wyrażając pole trójkąta OSB dwoma sposobami, otrzymujemy równość:

$$(*) \quad OB \cdot h = SB \cdot 10.$$

Ponieważ $SB = AB = a = OB\sqrt{2}$, więc $OB = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $SB = a$. Podstawiając te wartości do równania (*), otrzymujemy: $\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot h = 10a$, skąd $\boxed{h = 10\sqrt{2}}$.

Wysokością trójkąta równobocznego ABS o boku długości a , jest $\boxed{SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$.

Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego ODS , otrzymujemy równanie:

$$SO^2 + OD^2 = SD^2. \text{ Po podstawieniu do niego danych: } SO = h = 10\sqrt{2}, \quad OD = \frac{a}{2}, \quad SD = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

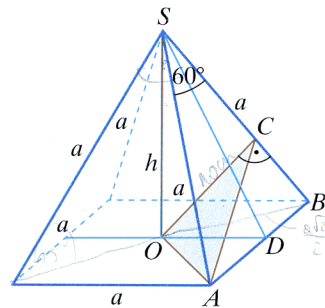
uzyskujemy równanie $(10\sqrt{2})^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$. Rozwiązując je, otrzymujemy:

$$100 \cdot 2 + \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2; \quad \frac{1}{2}a^2 = 200; \quad a^2 = 400 \text{ i ostatecznie } a = 20. \text{ Zatem } SD = 10\sqrt{3}. \text{ Mamy zatem}$$

ostrosłup prawidłowy czworokątny o wszystkich krawędziach długości $a = 20$ i o wysokości $h = 10\sqrt{2}$. Możemy zatem obliczyć jego objętość $V = \frac{1}{3} \cdot 20^2 \cdot 10\sqrt{2} = \frac{4000}{3}\sqrt{2}$ i pole powierzchni całkowitej $S_c = 20^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10\sqrt{3} = 400 + 400\sqrt{3} = 400(1 + \sqrt{3})$.

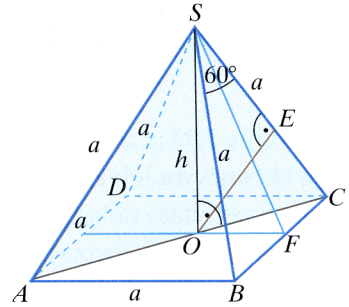
Odpowiedź: $V = \frac{4000}{3}\sqrt{2}$ cm³, $S_c = 400(1 + \sqrt{3})$ cm².

Sposób drugi. Spójrzmy raz jeszcze na ten ostrosłup (ryc. 5.91b), o którym już wiemy, że jest prawidłowym ostrosłupem czworokątnym o wszystkich krawędziach równej długości. Zauważmy, że jego przekrój płaszczyzną ASC jest trójkątem równoramiennym prostokątnym ASC . Nietrudno także zauważyć, że trójkątami równoramiennymi prostokątnymi są również



Ryc. 5.91a.

trójkąty SOC i SOE . Wobec tego $SO = OC$ i $OE = SE = \frac{1}{2} SC$.
 Ponieważ $OE = 10$, więc $h = 10\sqrt{2}$ oraz $a = 20$. Ponadto SF jest wysokością trójkąta równobocznego o boku długości a , więc $SF = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$. Zatem $V = \frac{1}{3} \cdot 20^2 \cdot 10\sqrt{2} = \frac{4000}{3}\sqrt{2}$, zaś $S_c = 20^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10\sqrt{3} = 400(1 + \sqrt{3})$.



Ryc. 5.91b.

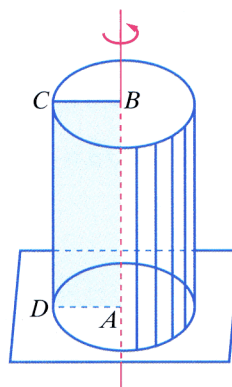
Pytania i zadania

1. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 3 cm, a krawędź boczna wynosi 6 cm.
2. Oblicz objętość czworościanu foremego o krawędzi długości a .
3. Oblicz objętość ośmiościanu foremego o krawędzi długości a .
4. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość b i jest nachylna do płaszczyzny podstawy pod kątem α . Oblicz objętość tego ostrosłupa.
5. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi bocznej długości b i promieniu długości r okręgu wpisanego w podstawę tego ostrosłupa.
6. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt płaski przy wierzchołku wynosi α . Znajdź tangens kąta nachylenia płaszczyzny, przechodzącej przez środki sąsiednich krawędzi podstawy i wierzchołek ostrosłupa, do płaszczyzny podstawy.
7. Udowodnij, że jeżeli trzy ściany czworościanu są wzajemnie prostopadłe, to kwadrat pola czwartej ściany jest równy sumie kwadratów pól tych trzech ścian.
8. Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa, którego podstawą jest trójkąt prostokątny o obu przyprostokątnych długości a i o wysokości długości a mającej spodek w środku okręgu wpisanego w podstawę.
9. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt o bokach długości $2\sqrt{3}$, 4 i 4, a wszystkie krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.
10. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt o bokach długości 6, 5 i 5. Ściany boczne tego ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 45° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.
11. Podstawą ostrosłupa jest trapez równoramienny, którego ramię ma długość 12 cm. Kąt ostry tego trapezu wynosi 30° . Ściany boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.
12. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt o bokach długości 6, 8 i 10. Ściany boczne tego ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.
- 13*. Udowodnij, że płaszczyzna przechodząca przez środki krawędzi AB , BD i CD czworościanu $ABCD$ dzieli go na dwie bryły o równych objętościach.

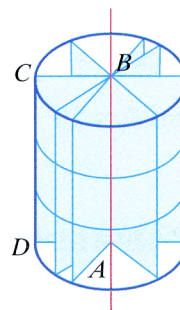
7. Bryły obrotowe: walec, stożek, kula

Walec

Rycina 5.92 przedstawia model bryły zwanej **walcem obrotowym** lub krótko **walcem**, powstałej przez obrót prostokąta dokoła prostej, zawierającej jeden z jego boków. W obrocie tym boki tego prostokąta prostopadłe do osi obrotu (na ryc. są nimi AD i BC) zakreślają dwa koła, które nazywamy **podstawami walca**; a równoległy do osi obrotu, rozłączny z nią bok tego prostokąta (na ryc. jest nim bok DC) zakreśla powierzchnię, którą nazywamy **powierzchnią boczną walca**. Tworzą ją wszystkie odcinki równoległe do AB i łączące brzozy podstaw (np. odcinek CD). Odcinki te nazywamy **tworzącymi walca**. Powierzchnia boczna walca łącznie z jego podstawami stanowi **powierzchnię całkowitą walca**, zwaną też krótko: **powierzchnią walca**. Promień podstawy walca nazywamy **promieniem walca**, a odcinek między płaszczyznami podstaw prostopadły do nich i którego długość równa jest ich odległości, nosi miano **wysokości walca**. Przekrój walca płaszczyzną przechodzącą przez oś obrotu nazywa się **przekrojem osiowym walca** (ryc. 5.93).



Ryc. 5.92.

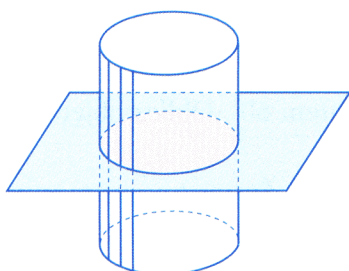


Ryc. 5.93.

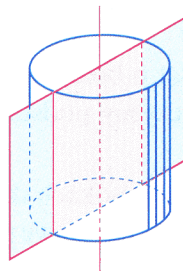
Kształt walca mają (czasami w przybliżeniu) rozmaite przedmioty: puszki, monety, sworznie, pręty itp.

Warto jeszcze zauważyć, że przekrój walca płaszczyzną równoległą do podstaw (albo, jak kto woli: prostopadłą do tworzących) jest **kołem** (ryc. 5.94), zaś płaszczyzną prostopadłą do podstaw (czyli równoległą do tworzących) – prostokątem (ryc. 5.95).

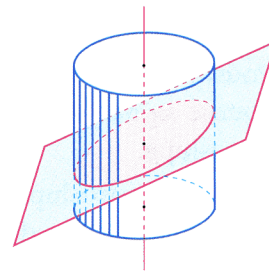
Przekrój walca płaszczyzną przecinającą jego tworzące ukośnie jest figurą, którą ogranicza linia zwana elipsą (ryc. 5.96).



Ryc. 5.94.

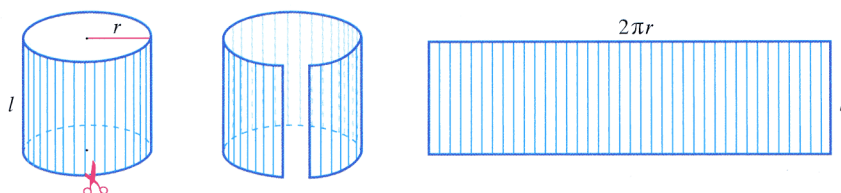


Ryc. 5.95.



Ryc. 5.96.

Rozcinając wzdłuż jednej tworzącej powierzchnię boczną walca, możemy ją rozwinąć na płaszczyźnie; otrzymamy wówczas prostokąt, którego jeden bok ma długość równą obwodowi podstawy, a drugi – wysokości walca (ryc. 5.97).

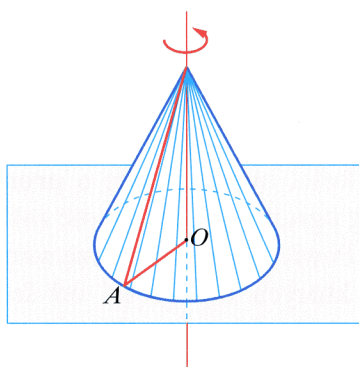


Ryc. 5.97.

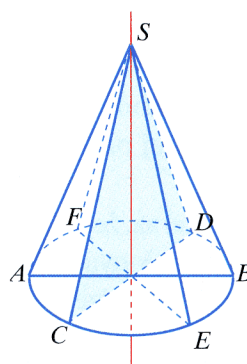
Stożek

Stożkiem obrotowym lub krótko: **stożkiem** nazywamy bryłę powstałą przez obrót trójkąta prostokątnego dokoła prostej zawierającej jedną z jego przyprostokątnych (ryc. 5.98). Powierzchnię, którą zakreśla wówczas przeciwprostokątna tego trójkąta, nazywamy **powierzchnią boczną** stożka, koło zaś, zakreślane przez przyprostokątną niezawartą w osi obrotu, nosi miano **podstawy stożka**. Wierzchołek obracanego trójkąta nienależący do podstawy stożka nazywamy **wierzchołkiem stożka**, a promień podstawy stożka – **promieniem stożka**. Odcinek łączący wierzchołek stożka z jego podstawą i do niej prostopadły to **wysokość stożka**. Każdy odcinek łączący wierzchołek stożka z brzegiem jego podstawy nazywa się **tworzącą stożka**. Przekrój stożka płaszczyzną przechodzącą przez oś obrotu nazywa się **przekrojem osiowym stożka**; jest nim trójkąt równoramienny o ramionach, którymi są tworzące stożka, i o podstawie, będącej średnicą podstawy stożka (na ryc. 5.99 są to trójkąty: ABS , CDS i EFB). Przekrój stożka płaszczyzną równoległą do jego podstawy jest kołem (ryc. 5.100). Kąt przy wierzchołku przekroju osiowego stożka nazywamy **kątem rozwarcia stożka**.

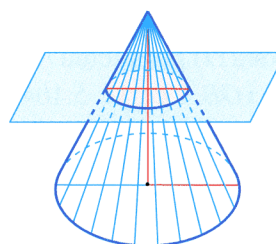
Rozcinając powierzchnię boczną stożka wzdłuż jednej z jego tworzących, możemy ją rozwinąć na płaszczyźnie, otrzymując w ten sposób wycinek koła o promieniu długości tworzącej stożka (ryc. 5.101).



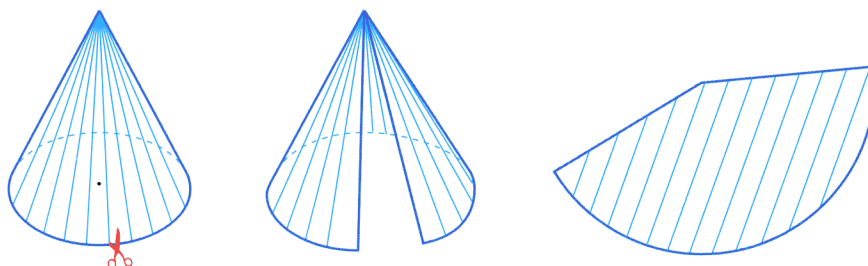
Ryc. 5.98.



Ryc. 5.99.



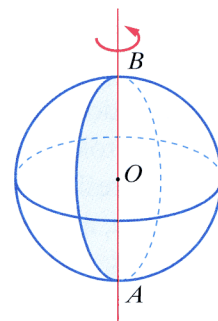
Ryc. 5.100.



Ryc. 5.101.

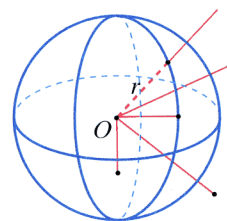
Kula

Gdybyśmy wycięli z tektury półkole o promieniu r i obracali je dokoła jego średnicy AB , trzymając za końce tej średnicy (ryc. 5.102), wówczas wszystkie punkty przestrzeni, przez które w tym obrocie przejdzie półkole, utworzą **kulę o promieniu długości r** . Półokrąg ograniczający półkole zakresli **powierzchnię tej kuli**. Powierzchnię tę tworzą wszystkie punkty przestrzeni, których odległości od środka O są równe długości tego promienia. Zbiór tych punktów nazywamy **sferą**.



Ryc. 5.102.

Można udowodnić, że kula jest figurą wypukłą, ponieważ każdy odcinek łączący dwa dowolne punkty kuli zawiera się w niej. Punkty, których odległości od środka kuli są mniejsze od jej promienia, leżą **wewnątrz** tej kuli, zaś punkty, których odległości od środka kuli są większe od jej promienia, leżą **na zewnątrz kuli** (ryc. 5.103).



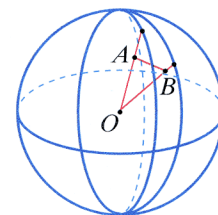
Ryc. 5.103.

Udowodnimy teraz, że końce średnicy kuli są punktami najbardziej oddalonymi w kuli. Prawdziwe jest bowiem następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Odległość dowolnych dwóch punktów kuli jest nie większa od długości jej średnicy.

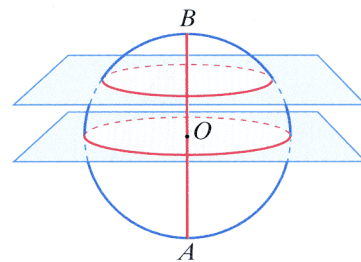
□ Dowód. Niech A i B będą dwoma dowolnymi punktami kuli o środku O i promieniu r . Zatem zachodzą nierówności: $OA \leq r$ i $OB \leq r$ (ryc. 5.104). Dodając te nierówności stronami, otrzymujemy $OA + OB \leq 2r$. Ponieważ $OA = AO$, a $AB \leq AO + OB$ (nierówność trójkąta), rzeczywiście $AB \leq AO + OB = OA + OB \leq 2r$. □



Ryc. 5.104.

Przekrój **kuli** dowolną płaszczyzną jest **kołem**, zaś przekrój **sfery** – **okręgiem**. Koło to (lub ten okrąg) jest największe (największy), gdy płaszczyzna przechodzi przez środek kuli. Przekrój taki jest kołem (okręgiem), którego środkiem jest środek kuli, a promieniem – promień tej kuli. Takie koło (taki okrąg) nazywamy **kołem wielkim** kuli (okręgiem wielkim sfery) (ryc. 5.105).

Okrąg leżący na powierzchni kuli jest linią przecięcia jej powierzchni z płaszczyzną okręgu.



Ryc. 5.105.



Pytania i zadania

1. Podaj określenie walca.
2. Co nazywamy:
 - a) tworzącą walca,
 - b) wysokością walca,
 - c) powierzchnią całkowitą walca?
3. Jakie mogą być przekroje walca płaszczyzną?
4. Podaj określenie stożka.
5. Co nazywamy:
 - a) tworzącą stożka,
 - b) wysokością stożka,
 - c) powierzchnią całkowitą stożka?
6. Podaj określenie kuli i sfery.
7. Co to jest koło wielkie kuli (okrąg wielki sfery)?
8. Narysuj siatkę:
 - a) walca o danym promieniu i danej wysokości;
 - b) stożka o danym promieniu i danej wysokości.
9. Zaznacz kąt nachylenia przekątnej przekroju osiowego walca do płaszczyzny podstawy tego walca.
10. Zaznacz kąt nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy tego stożka.
11. Czy odcinek długości 15 cm zmieści się w kuli o promieniu długości 7 cm?
12. Czy trójkąt o polu wynoszącym 9 cm^2 zmieści się w kuli o promieniu długości 1,2 cm?
- 13*. Udowodnij, że kula o środku O_1 i promieniu r_1 jest zawarta w kuli o środku O_2 i promieniu r_2 wtedy i tylko wtedy, gdy $O_1O_2 \leq r_2 - r_1$.
- 14*. Dwie sfery są styczne (mają jeden punkt wspólny). Znajdź zależności między ich promieniami i odległością ich środków.
15. Kula o środku A i promieniu długości r jest zawarta w kuli o środku B i promieniu długości 9. Udowodnij, że jeżeli $AB = 3$, to $r \leq 6$.
16. Dwie rozłączne kule k_1 i k_2 są zawarte w kuli k_3 . Udowodnij, że długość promienia kuli k_3 jest nie mniejsza od sumy promieni kul k_1 i k_2 .
- 17**. Szklankę w kształcie walca o średnicy 6 cm i wysokości 9 cm napełniono wodą. Następnie szklankę tę przechylono tak, że wylała się $\frac{1}{3}$ ilości wody. Pod jakim kątem przechylono szklankę?

8. Związki miarowe w bryłach obrotowych

Przypomnijmy teraz wzory na obliczanie pól powierzchni i objętości brył obrotowych. Przyjmijmy te same oznaczenia, jak przy graniastosłupach i ostrosłupach, mianowicie symbole S_c , S_p , S_b i V oznaczać będą odpowiednio:

- pole powierzchni całkowitej,
- pole podstawy,
- pole powierzchni bocznej,
- objętość.

Pole powierzchni i objętość walca

Jeżeli r jest długością promienia walca, a l – długością jego tworzącej, to po rozwinięciu powierzchni bocznej walca otrzymamy prostokąt o bokach długości $2\pi r$ i l .

Zatem:

Twierdzenie 1.

Pole powierzchni bocznej walca równe jest iloczynowi długości okręgu podstawy i wysokości walca:

$$S_b = 2\pi r l.$$

Jeśli długość wysokości walca, równą długości l jego tworzącej, oznaczmy literą h , wówczas:

$$S_b = 2\pi r h.$$

Twierdzenie 2.

Pole powierzchni całkowitej walca jest sumą pola powierzchni bocznej i pól obu podstaw: $S_c = S_b + 2S_p = 2\pi r l + 2\pi r^2$, czyli:

$$S_c = 2\pi r(l + r).$$

Objętość walca oblicza się podobnie jak objętość graniastosłupa:

Twierdzenie 3.

Objętość walca równa się iloczynowi pola podstawy i długości wysokości:

$$V = \pi r^2 l.$$

Jeśli długość wysokości walca oznaczmy jako h , to jego objętość wyrazimy wzorem: $V = \pi r^2 h$.

Pole powierzchni i objętość stożka

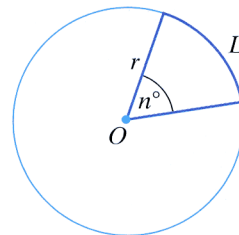
Zanim podamy wzór na pole powierzchni bocznej stożka, udowodnimy dwa twierdzenia:

Twierdzenie 1.

Długość L łuku okręgu o promieniu długości r , na którym jest oparty kąt środkowy tego okręgu o mierze n° , wyraża wzór:

$$(*) L = \frac{\pi r n}{180}.$$

Dowód. Z podanego założenia wynika, że łuk ten stanowi $\frac{n}{360}$ okręgu (ryc. 5.106). Wobec tego $L = 2\pi r \cdot \frac{n}{360} = \frac{\pi r n}{180}$.



Ryc. 5.106.

Twierdzenie 2.

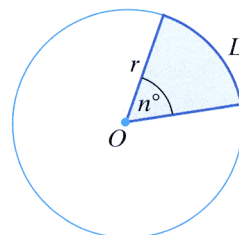
Pole S wycinka koła o promieniu długości r ograniczonego łukiem długości L wyraża się wzorem:

$$(**) S = \frac{1}{2} Lr.$$

Dowód. Wycinek kołowy, którego łuk ma n stopni (ryc. 5.107), stanowi $\frac{n}{360}$ koła. Zatem:

$$S = \pi r^2 \cdot \frac{n}{360} = \frac{\pi r^2 n}{360} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi r n}{180} \cdot r = \frac{1}{2} Lr. \quad \square$$

Znając podane twierdzenie, możemy wyprowadzić wzór na pole powierzchni bocznej stożka:



Ryc. 5.107.

Twierdzenie 3.

Pole powierzchni bocznej stożka o promieniu długości r podstawy i tworzącej długości l obliczamy za pomocą wzoru:

$$S_b = \pi r l.$$

Dowód. Powierzchnia boczna tego stożka jest, jak wiemy, wycinkiem koła o promieniu długości l , ograniczonego łukiem długości $2\pi r$. Podstawiając te wartości do wzoru (**), otrzymujemy: $S_b = \frac{1}{2} 2\pi r \cdot l = \pi r l$.

Powierzchnię całkowitą stożka stanowi powierzchnia boczna stożka łącznie z powierzchnią jego podstawy. Prawdziwe jest zatem twierdzenie:

Twierdzenie 4.

Pole powierzchni całkowitej stożka o promieniu długości r podstawy i o tworzącej długości l wyraża wzór:

$$S_c = \pi r (r + l).$$

Dowód. Podstawa stożka jest kołem o promieniu długości r , więc jej pole $S_p = \pi r^2$. Zatem pole powierzchni całkowitej tego stożka $S_c = S_p + S_b = \pi r^2 + \pi r l = \pi r (r + l)$.

Objętość stożka obliczamy podobnie jak objętość ostrosłupa. Przyjmijmy zatem bez dowodu następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.

Objętość stożka o promieniu długości r podstawy i o wysokości długości h wyraża się wzorem:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Pole powierzchni i objętość kuli

Mając dany promień kuli, można obliczyć jej pole powierzchni i objętość. To trudne zagadnienie rozwiązał po raz pierwszy największy matematyk czasów starożytnych – Archimedes (III w. p.n.e.). Zawdzięczamy mu dowody kolejnych twierdzeń o kuli:

Twierdzenie 1.

Pole powierzchni kuli jest cztery razy większe od pola koła wielkiego tej kuli. Zatem pole S powierzchni kuli o promieniu długości r wyraża wzór:

$$S = 4 \pi r^2.$$

Twierdzenie 2.

Objętość kuli jest cztery razy większa od objętości stożka, którego podstawą jest koło wielkie kuli, a wysokość równa się promieniowi kuli. Zatem objętość kuli o promieniu długości r można obliczyć za pomocą wzoru:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Warto przy tej okazji wspomnieć, że to właśnie Archimedesowi zawdzięczamy pojawienie się w matematyce liczby π . Udowodnił on bowiem, że stosunek długości dowolnego okręgu do długości jego średnicy jest wielkością stałą, której nadał nazwę π . Dziś, liczbą tą operujemy z różnym jej przybliżeniem: $\pi = 3,14159265358979323846264\dots$, wiemy też, że jest ona niewymierna (dowód bardzo trudny!).

Zadania z zastosowaniem związków miarowych w bryłach obrotowych

Podane wzory niech posłużą nam do rozwiązania kilku zadań.

Przykład 1. Wiemy, że 1 cm^3 miedzi waży 8,9 g. Ile ważyłby drut miedziany o średnicy 0,2 cm, opasujący Ziemię wzdłuż równika? Przyjmujemy, że długość równika wynosi 40000 km, zaś $\pi = 3,14$ (z dokładnością do 0,01).

Rozwiązanie:

Drut ten, po rozpostarceniu go na płaskim terenie, będzie walcem o promieniu podstawy $r = 10^{-1} \text{ cm}$ i wysokości $h = 40000 \text{ km}$. Zamieniając kilometry na centymetry, otrzymujemy: $h = 4 \cdot 10^4 \text{ km} = 4 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \text{ m} = 4 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \cdot 10^2 \text{ cm} = 4 \cdot 10^9 \text{ cm}$. Obliczmy teraz objętość tego walca (w cm^3):

$$V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2 \cdot 4 \cdot 10^9 \text{ cm} = 4 \cdot \pi \cdot 10^7 \text{ cm}^3 \approx 4 \cdot 3,14 \cdot 10^7 \text{ cm}^3 = 125600000 \text{ cm}^3.$$

Skoro 1 cm^3 miedzi waży 8,9 g, to drut ten waży około: $8,9 \text{ g} \cdot 125600000 = 1117840000 \text{ g} = 1117,84 \text{ t}$.

Odpowiedź: około 1117,84 t.

Przykład 2. Ile metrów sześciennych betonu potrzeba do ocembrowania studni o głębokości 8 m, jeżeli średnica wewnętrzna kręgów wynosi 1 m, a ich grubość jest równa 0,2 m?

Rozwiązanie:

Ponieważ przekrój poprzeczny kręgu jest pierścieniem kołowym o średnicy zewnętrznej długości 1,4 m, a wewnętrznej 1 m (ryc. 5.108), więc objętość kręgu V jest równa różnicy objętości dwóch walców o wysokości 8 m i o promieniach podstaw długości odpowiednio $r_1 = 0,7 \text{ m}$ i $r_2 = 0,5 \text{ m}$. Zatem:

$$V = \pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h = \pi (r_1^2 - r_2^2) h = \pi (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) \cdot h.$$

Podstawiając podane wartości i przyjmując, że $\pi \approx 3,14$, otrzymujemy:

$$V \approx 3,14 \cdot 0,2 \cdot 1,2 \cdot 8 = 6,0288.$$

Odpowiedź: Potrzeba około 6 m^3 betonu.

Przykład 3. Namiot ma w dolnej części kształt walca, a w górnej kształt stożka, którego tworzące są nachylone do podstawy pod kątem 60° . Obwód namiotu u dołu wynosi $18\frac{6}{7} \text{ m}$, a wysokość walca jest równa 2 m. Ile metrów kwadratowych płótna potrzeba na uszycie tego namiotu? Przyjmij $\pi \approx 3\frac{1}{7}$.

Rozwiązanie:

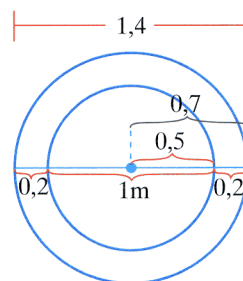
Spójrz na rycinę 5.109. Ze wzoru na obwód koła możemy obliczyć długość promienia r podstawy tego namiotu:

$$2\pi r = 18\frac{6}{7}, \quad 2 \cdot 3\frac{1}{7} \cdot r \approx 18\frac{6}{7}, \quad \frac{44}{7} \cdot r \approx \frac{132}{7}, \quad \text{skąd } r \approx 3.$$

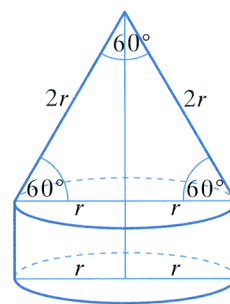
Powierzchnia tego namiotu ma pole równe sumie pól powierzchni bocznej walca, o promieniu podstawy $r \approx 3 \text{ m}$ i wysokości (a zarazem tworzącej) $h = 2 \text{ m}$, oraz powierzchni bocznej stożka mającego promień podstawy $r \approx 3 \text{ m}$ i tworzącą $l = 6 \text{ m}$ (przekrój osiowy tego stożka jest trójkątem równobocznym o boku długości 6). Zatem pole powierzchni namiotu wynosi:

$$2\pi r h + \pi r l = \pi r (2h + l) \approx 3\frac{1}{7} \cdot 3 \cdot (2 \cdot 2 + 6) = \frac{660}{7} = 94\frac{2}{7}.$$

Odpowiedź: Na uszycie namiotu potrzeba około $94\frac{2}{7} \text{ m}^2$ płótna.



Ryc. 5.108.



Ryc. 5.109.

Przykład 4. Budynek obserwatorium astronomicznego jest okrągłą wieżą o wysokości 5 m i średnicy 8 m. Wieża jest zakończona kopułą w kształcie półkuli. Oblicz, przyjmując $\pi = 3,14$:

- a) objętość przestrzeni zajętej przez budynek;
 b) pole powierzchni całego budynku.

Rozwiązanie:

Przekrojem osiowym tego budynku jest prostokąt o bokach długości 8 m i 5 m zakończony półkołem o promieniu długości 4 m (ryc. 5.110). Zatem:

- a) objętość przestrzeni zajętej przez ten budynek:

$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4^3 = \pi \cdot 4^2 \cdot \left(5 + \frac{2}{3} \cdot 4\right) = \pi \cdot 16 \cdot \frac{23}{3} \approx 3,14 \cdot \frac{368}{3} \approx 385;$$

- b) pole powierzchni całego budynku:

$$S = 2\pi \cdot 4 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot 4^2 = 40\pi + 32\pi = 72\pi \approx 72 \cdot 3,14 \approx 226.$$

Odpowiedź: Budynek zajmuje około 385 m³ przestrzeni i ma około 226 m² powierzchni.

Przykład 5. Kąt rozwarcia stożka jest równy α , a jego objętość wynosi V . Oblicz pole powierzchni bocznej tego stożka.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji sinus i cosinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym, mamy (ryc. 5.111): $h = l \cos \frac{\alpha}{2}$, $r = l \sin \frac{\alpha}{2}$.

Po podstawieniu tych wartości do wzorów na objętość i pole powierzchni bocznej stożka otrzymujemy:

$$(1) V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot l^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot l \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3} \pi l^3 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2};$$

$$(2) S_b = \pi \cdot r \cdot l = \pi l^2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Stąd: $V = \frac{1}{3} \pi l^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$, następnie $\pi l^3 = \frac{3V}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}$, co podnosimy do kwadra-

tu i otrzymujemy: $\pi^2 l^6 = \frac{9V^2}{\sin^4 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$, a mnożąc tę postać przez π , uzyskujemy:

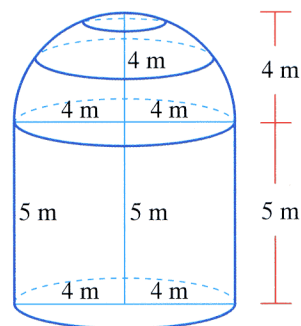
$$(*) \left(\pi l^2\right)^3 = \frac{9V^2 \cdot \pi}{\sin^4 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Ponieważ pole powierzchni bocznej tego stożka $S_b = \pi l^2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$, więc

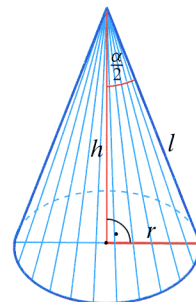
$$S_b^3 = \left(\pi l^2\right)^3 \cdot \sin^3 \frac{\alpha}{2} = \frac{9V^2 \cdot \pi}{\sin^4 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin^3 \frac{\alpha}{2} = \frac{9V^2 \pi \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^3 \frac{\alpha}{2}} = \frac{9\pi V^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^3 \frac{\alpha}{2}} \text{ i ostatecznie}$$

$$S_b = \frac{\sqrt[3]{9\pi \cdot V^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Odpowiedź: Pole powierzchni bocznej tego stożka wynosi: $\frac{\sqrt[3]{9\pi \cdot V^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$.



Ryc. 5.110.



Ryc. 5.111.

Przykład 6. W stożek o wysokości h i promieniu podstawy R wpisano kulę.

a) Wyznacz długość promienia r tej kuli.

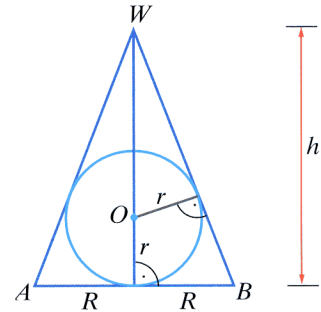
b) Wykaż, że (*) $\frac{Rh}{2R+h} < r < \sqrt{\frac{Rh}{2}}$.

Rozwiązanie:

Przekrój osiowy stożka z wpisaną w ten stożek kulą jest trójkątem równoramiennym z wpisanym weń kołem. Przyjmijmy oznaczenia jak na rycinie 5.112.

a) Obliczając pole S trójkąta ABW ze wzorów: $S = R \cdot h$ i $S = p \cdot r$, gdzie p oznacza połowę obwodu trójkąta, otrzymamy równość $pr = Rh$, z której wynika, że $r = \frac{Rh}{p}$.

Ponieważ $p = \frac{1}{2}(AB + 2AW) = \frac{1}{2}(2R + 2\sqrt{R^2 + h^2}) = R + \sqrt{R^2 + h^2}$, więc $r = \frac{Rh}{R + \sqrt{R^2 + h^2}}$.



Ryc. 5.112.

b) Pole koła wpisanego w trójkąt jest mniejsze od pola tego trójkąta, więc $\pi r^2 < Rh$.

Ponieważ $2 < \pi$, to $2r^2 < \pi r^2 < Rh$, skąd $2r^2 < Rh$, a po przekształceniu $r^2 < \frac{Rh}{2}$

i ostatecznie $r < \sqrt{\frac{Rh}{2}}$. Ponadto: $R^2 + h^2 < R^2 + 2Rh + h^2 = (R + h)^2$, skąd

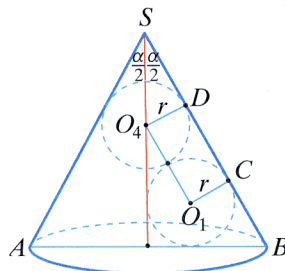
$\sqrt{R^2 + h^2} < R + h$. Zatem $R + \sqrt{R^2 + h^2} < 2R + h$, a więc: $r = \frac{Rh}{R + \sqrt{R^2 + h^2}} > \frac{Rh}{2R + h}$.

Wobec tego $\frac{Rh}{2R+h} < r < \sqrt{\frac{Rh}{2}}$.

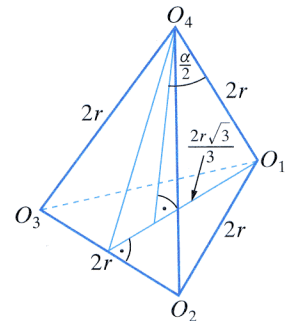
Przykład 7. Cztery przystające, parami styczne kule umieszczono w stożku w ten sposób, że trzy z nich są styczne do jego podstawy, wszystkie cztery zaś do jego powierzchni bocznej. Wyznacz kąt rozwarcia tego stożka.

Rozwiązanie:

Rozważmy przekrój danego w zadaniu stożka płaszczyzną wyznaczoną przez jego oś i środki dwóch kul, z których jedna jest styczna tylko do powierzchni bocznej, a druga – również do podstawy tego stożka (ryc. 5.113). Ponieważ tworząca BS , styczna do tych kul, jest prostopadła do ich promieni, czworokąt O_1O_4DC jest prostokątem. Oznacza to, że BS jest równoległa do O_1O_4 . W takim razie kąt nachylenia tworzącej stożka do jego podstawy jest zarazem kątem nachylenia krawędzi bocznej do podstawy czworoboku, którego wierzchołkami są środki danych czterech kul (ryc. 5.114).



Ryc. 5.113.



Ryc. 5.114.

Wobec tego kąt rozwarcia stożka to podwojony kąt, jaki tworzy krawędź tego czworoboku-

nu z jego wysokością. Zatem $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2r\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, czyli $\frac{\alpha}{2} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$ i ostatecznie $\alpha = 2\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$.

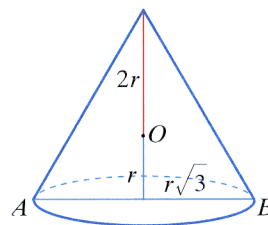
Odpowiedź: Kąt rozwarcia tego stożka ma miarę $\alpha = 2\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Przykład 8. Kula o promieniu długości r , wpisana w stożek, ma środek w tym samym punkcie, co kula opisana na nim. Wyznacz objętość tego stożka.

Rozwiązanie:

Przekrój osiowy tego stożka jest trójkątem równoramiennym, takim, że wpisane w niego i opisane na nim koła mają wspólny środek. Trójkąt ten jest więc równoboczny, gdyż dwusieczne jego kątów są symetralnymi jego boków. Dlatego wysokość stożka wynosi $3r$, zaś promień podstawy ma długość $r\sqrt{3}$. Zatem objętość danego w zadaniu stożka $V = \frac{1}{3} \pi (r\sqrt{3})^2 \cdot 3r = 3\pi r^3$.

Odpowiedź: Objętość stożka wynosi $3\pi r^3$.

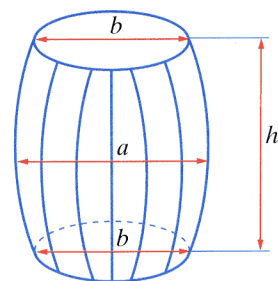


Ryc. 5.115.

Pytania i zadania

- Podaj wzór na:
 - pole powierzchni bocznej walca,
 - pole powierzchni całkowitej walca,
 - objętość walca.
- Jak się oblicza:
 - pole powierzchni bocznej stożka,
 - pole powierzchni całkowitej stożka,
 - objętość stożka?
- Podaj wzór na:
 - pole powierzchni kuli,
 - objętość kuli.
- Jak zmieni się pole powierzchni bocznej i objętość walca, gdy:
 - promień podstawy zwiększymy 5 razy,
 - wysokość zwiększymy 3 razy,
 - promień podstawy zwiększymy n razy, a wysokość m razy?
- Jak zmieni się pole powierzchni całkowitej i objętość walca, gdy promień jego podstawy i wysokość zwiększymy k razy?
- Jak zmieni się pole powierzchni bocznej stożka, gdy promień jego podstawy zmniejszymy 2 razy, a tworzącą zostawimy bez zmiany?
- Jak zmieni się objętość stożka, jeżeli jego wysokość podwoimy, a promień podstawy dwukrotnie zmniejszymy?

8. Gdy podwoimy promień kuli, ile razy zwiększy się jej:
- pole powierzchni,
 - objętość?
9. Średnica kranu wodociągowego wynosi 1,4 cm. Z jaką prędkością z tego kranu wypływa woda, jeżeli w ciągu 3 sekund wypełnia litrowy garnek?
10. Fabryka otrzymała zamówienie na dwa rodzaje litrowych puszek do konserw: o średnicy równej 14 cm i 10 cm. Jakie będą wysokości tych puszek i na który rodzaj puszek potrzeba więcej blachy? Przyjmijmy, że $\pi \approx 3\frac{1}{7}$.
11. Pole wycinka kołowego stanowi $\frac{1}{3}$ pola koła, a cięciwa łuku tego wycinka ma długość $\sqrt{6}$. Oblicz objętość stożka, który powstanie, gdy wycinek zwiniemy w lejek.
12. Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu na płaszczyźnie jest ćwiartką koła o promieniu 15 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego stożka.
13. Trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej długości 5 i o jednej z przyprostokątnych długości 4 obraca się dokoła przeciwprostokątnej. Oblicz objętość powstałej bryły obrotowej.
14. Stożek jest wpisany w kulę o promieniu $r = 8$ cm w ten sposób, że jego podstawa jest kołem wielkim kuli. Oblicz stosunek objętości stożka do objętości kuli oraz pole powierzchni tego stożka.
15. Do okrągłego basenu z wodą o średnicy 1 m wpuszczono kroplę oliwy o średnicy 0,5 cm. Kropla równomiernie rozlała się po powierzchni wody. Oblicz grubość warstwy oliwy.
16. Objętość beczki obliczamy w przybliżeniu według wzoru $V = \frac{1}{12} \pi h (2a^2 + b^2)$, gdzie a , b i h są wielkościami przedstawionymi na rycinie 5.116. Oblicz V , gdy $a = 60$ cm, $b = 45$ cm, $h = 95$ cm.



Ryc. 5.116.

17. Oblicz pole powierzchni i objętość globu ziemskiego, wiedząc, że równik ma długość 40000 km.
18. Przekrój osiowy walca jest kwadratem, a objętość walca równa się 16π . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.
19. Odległość punktów A i B na powierzchni kuli, mierzona po jej powierzchni, wynosi 15,7 cm. Promienie OA i OB są prostopadłe. Oblicz pole powierzchni i objętość tej kuli.

9. Zadania różne z geometrii przestrzennej

W podrozdziale tym zajmiemy się rozwiązywaniem trudniejszych zadań z geometrii przestrzennej.

Przykład 1. Udowodnij, że jeżeli w wielościan o objętości V i o polu powierzchni całkowitej S_c można wpisać kulę (tzn. istnieje kula styczna do wszystkich ścian tego wielościanu) o promieniu r , to $V = \frac{1}{3} S_c \cdot r$.

$$V = \frac{1}{3} S_c \cdot r.$$

Rozwiązanie:

Łącząc środek tej kuli z wierzchołkami danego wielościanu, otrzymamy jego podział na ostrosłupy o wspólnym wierzchołku w środku tej kuli, których wysokościami są jej promienie, a podstawami ściany wielościanu. Przyjmijmy, że wielościan ten ma n ścian o polach S_1, S_2, \dots, S_n . Wówczas ostrosłupy, których podstawami są te ściany, mają objętości odpowiednio: $V_1 = \frac{1}{3} S_1 \cdot r$, $V_2 = \frac{1}{3} S_2 \cdot r$, ..., $V_n = \frac{1}{3} S_n \cdot r$.

Ponieważ: $V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$ oraz $S_c = S_1 + S_2 + \dots + S_n$, więc:

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n = \frac{1}{3} S_1 \cdot r + \frac{1}{3} S_2 \cdot r + \dots + \frac{1}{3} S_n \cdot r = \frac{1}{3} (S_1 + S_2 + \dots + S_n) r = \frac{1}{3} S_c r.$$

Przykład 2. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S . W ostrosłupie tym $AS = 1$ i $\sphericalangle ASB = 20^\circ$. Na krawędzi AS obrano punkt E , a na krawędzi BS punkt F tak, że $\sphericalangle DEA = \sphericalangle SEF = \sphericalangle SFE = \sphericalangle BFC$. Oblicz sumę $DE + EF + FC$.

Rozwiązanie:

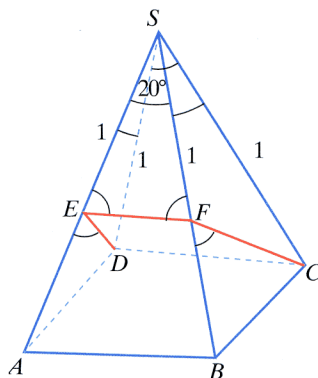
Ostrosłup ten jest prawidłowy, wszystkie więc jego kąty płaskie przy wierzchołku S mają miarę 20° , a krawędzie boczne długość 1 (ryc. 5.117). Rozpatrzmy fragment siatki tego ostrosłupa, który stanowią jego ściany ASD , ASB i BSC (ryc. 5.118).

Z równości $\sphericalangle DEA = \sphericalangle SEF$ oraz $\sphericalangle SFE = \sphericalangle BFC$ wynikają równoległości par odcinków odpowiednio DE i EF oraz EF i FC , a stąd – współliniowość punktów D i E, F i C . Łamana $DEFC$ jest więc bokiem DC trójkąta równobocznego DSC o boku długości 1. Zatem $DE + EF + FC = 1$.

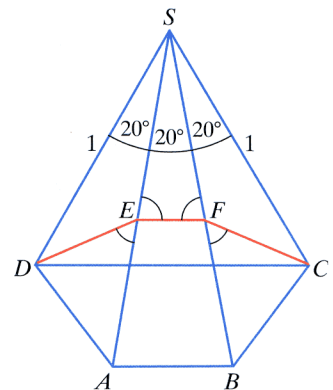
Przykład 3. Kwadrat jest siatką pewnego ostrosłupa trójkątnego o objętości 9 cm^3 . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

Rozwiązanie:

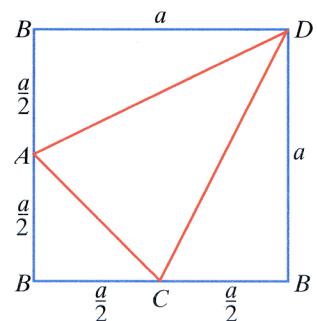
Założmy, że siatką tego ostrosłupa jest kwadrat o boku długości a . Po krótkiej analizie dochodzimy do wniosku, że wierzchołki A i C ostrosłupa są środkami sąsiednich boków tego kwadratu, a wierzchołki B i D – jego wierzchołkami (ryc. 5.119).



Ryc. 5.117.



Ryc. 5.118.



Ryc. 5.119.

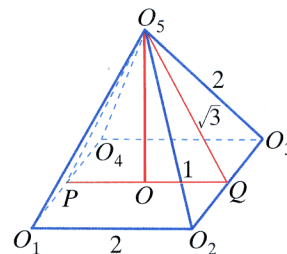
Traktując trójkąt prostokątny ABC jako podstawę rozważanego ostrosłupa, a trójkąty ABD , BCD i ACD – jako jego ściany boczne, otrzymujemy ostrosłup, którego wszystkie kąty płaskie przy wierzchołku B są proste. Krawędź BD jest więc wysokością tego ostrosłupa. Ma on zatem podstawę o polu $\frac{1}{8}a^2$ i wysokość długości a . Wobec tego jego objętość $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}a^2 \cdot a = \frac{1}{24}a^3$. Z treści zadania wiemy, że $V = 9$. Stąd otrzymujemy równanie $\frac{1}{24}a^3 = 9$, którego rozwiązaniem jest $a = 6$. Pole rozważanego kwadratu stanowi oczywiście pole S_c powierzchni całkowitej naszego ostrosłupa, więc $S_c = 6^2 = 36$.

Odpowiedź: Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa wynosi 36 cm^2 .

Przykład 4*. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym umieszczono pięć kul o promieniu 1. Cztery z nich są styczne do podstawy, każda z nich – jeszcze do dwóch ścian bocznych ostrosłupa i do dwóch spośród pozostałych trzech kul. Piąta kula jest styczna do tych czterech kul i do wszystkich ścian bocznych ostrosłupa. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

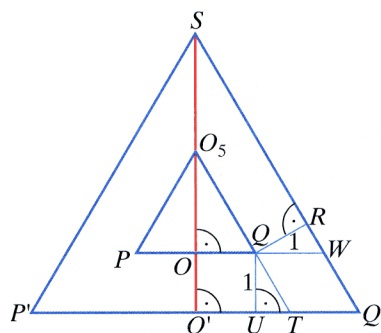
Rozwiązanie:

Kule ułożono w piramidę. Ich środki O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 są wierzchołkami ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego wszystkie krawędzie mają długość 2, a ściany są odległe od ścian ostrosłupa danego w zadaniu o 1 (ryc. 5.120). Wysokość ostrosłupa $O_1O_2O_3O_4O_5$ ma zatem długość równą $\sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2}$, a jego objętość $V_1 = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot \sqrt{2} = \frac{4}{3}\sqrt{2}$.



Ryc. 5.120.

Wróćmy do ostrosłupa, którego objętość mamy wyznaczyć. Z treści zadania wynika, że jego krawędzie podstawy są równoległe do odpowiednich krawędzi podstawy ostrosłupa $O_1O_2O_3O_4O_5$, a krawędzie boczne – do odpowiednich krawędzi bocznych tego ostrosłupa. Rozważmy przekrój obu ostrosłupów płaszczyzną przechodzącą przez punkty P, Q i O_5 (ryc. 5.121).



Ryc. 5.121.

Punkty P' i Q' to środki krawędzi podstawy danego ostrosłupa, równoległych do krawędzi O_1O_4 i O_2O_3 ostrosłupa $O_1O_2O_3O_4O_5$, zaś S to wierzchołek danego ostrosłupa. Ostrosłup ten jest podobny do ostrosłupa $O_1O_2O_3O_4O_5$.

Oznaczmy ich skalę podobieństwa przez k . Ponieważ stosunek objętości brył podobnych równy jest sześciastowi ich skali podobieństwa, więc jeśli wyznaczymy k , to objętość V danego ostrosłupa obliczymy ze wzoru $V = k^3 \cdot V_1$. Spójrzmy zatem raz jeszcze na rycinę 5.121. Widzimy, że $O'U = 1$, zaś $UT : UQ = OQ : OO_5$, skąd $UT = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ponadto $QW : QR = QO_5 : OO_5$, skąd $QW = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Wobec tego $P'Q' = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}$, a skala $k = \frac{P'Q'}{PQ} = \frac{2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$. Zatem szukana objętość

$$V = k^3 \cdot V_1 = \frac{1}{6}\sqrt{2}(2 + \sqrt{2} + \sqrt{6})^3 = \frac{2}{3}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^3.$$

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa jest równa $\frac{2}{3}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^3$.

Przykład 5. Wyznacz stosunek liczb wyrażających odpowiednio: objętość i pole powierzchni całkowitej graniastostupa prawidłowego sześciokątnego, w który można wpisać kulę o promieniu długości r .

Rozwiązanie:

Rozważmy przekrój danego graniastostupa płaszczyzną przechodzącą przez środek wpisanej wien kuli i prostopadłą do jego krawędzi bocznych, czyli tak zwany przekrój poziomy (ryc. 5.122). Przekrój ten jest sześciokątem foremnym (przystającym do podstawy) opisanym na kole o promieniu r . Ponieważ trójkąt AOB jest trójkątem równobocznym, w którym wysokość ma długość r , więc oznaczając przez a długość boku tego sześciokąta (a więc także tego trójkąta), otrzymujemy znaną zależność:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ skąd } a = \frac{2r\sqrt{3}}{3}.$$

Wobec tego pole podstawy tego graniastostupa: $S_p = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2r\sqrt{3}}{3} \cdot r = 2r^2\sqrt{3}$.

Zauważmy teraz, że wysokość h danego graniastostupa ma długość równą długości średnicy tej kuli, a więc $h = 2r$ (wystarczy rozpatrzyć przekrój pionowy tego graniastostupa, czyli przekrój płaszczyzną prostopadłą do obu jego podstaw i przechodzącą przez środek wpisanej wien kuli). Zatem objętość danego graniastostupa $V = S_p \cdot h = 2r^2\sqrt{3} \cdot 2r = 4r^3\sqrt{3}$. Pole jego po-

wierzchni całkowitej $S_c = 2 \cdot S_p + S_b = 2 \cdot 2r^2\sqrt{3} + 6 \cdot \frac{2r\sqrt{3}}{3} \cdot 2r = 12r^2\sqrt{3}$. Stąd otrzymujemy:

$$\frac{V}{S_c} = \frac{4r^3\sqrt{3}}{12r^2\sqrt{3}} = \frac{1}{3}r.$$

Odpowiedź: $\frac{V}{S_c} = \frac{r}{3}$.

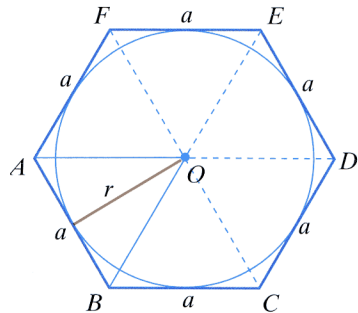
Uwaga. Zadanie to można rozwiązać znacznie prościej. Wystarczy powołać się na twierdzenie, które zastosowano w przykładzie 1.

Nasuwa się tutaj pytanie: W jaki graniastostup można wpisać kulę?

Analizując dwa przekroje graniastostupa z wpisana wien kulą: poziomy i pionowy (takie, jakie rozważaliśmy w przykładzie 5), nietrudno wykazać, że:

! W graniastostup prosty można wpisać kulę wtedy i tylko wtedy, gdy w podstawę graniastostupa można wpisać okrąg i średnica okręgu wpisanego w podstawę jest równa wysokości graniastostupa.

Przykład 6. Oblicz długość promienia kuli opisaney na graniastostupie prostym trójkątnym, którego podstawą jest trójkąt o bokach długości 6, 8 i 10, a wysokość ma długość 24.



Ryc. 5.122.

Rozwiązanie:

Sposób pierwszy. Zauważmy, że graniastosłup ten jest połową prostopadłościanu o krawędziach długości 6, 8 i 24 (ryc. 5.123). Kula opisana na tym graniastosłupie jest więc kulą opisaną na tym prostopadłościanie. Jej promień jest zatem połową przekątnej tego prostopadłościanu. Długość tego promienia:

$$R = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6^2 + 8^2 + 24^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4(3^2 + 4^2 + 12^2)} = \\ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13.$$

Sposób drugi. Niech tym graniastosłupem będzie graniastosłup $ABCA_1B_1C_1$ (ryc. 5.124).

Ponieważ środkiem okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środek jego przeciwprostokątnej, więc kula opisana na tym graniastosłupie ma środek O na ścianie ABB_1A_1 , a dokładniej w środku odcinka symetralnej do krawędzi AB , na tej ścianie, której długość jest równa wysokości tego graniastosłupa. Wobec tego długość promienia tej kuli:

$$R = CO = \sqrt{CD^2 + DO^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13.$$

Uwaga. Na graniastosłupie prostym można opisać kulę wtedy i tylko wtedy, gdy na jego podstawie można opisać okrąg. Wynika stąd, że kulę można opisać na każdym graniastosłupie prawidłowym oraz na każdym graniastosłupie prostym, którego podstawą jest trójkąt. Środek tej kuli jest oczywiście równo odległy od obu podstaw, a jego rzutem na podstawę jest środek okręgu na niej opisanego.

Przykład 7. Krawędzie boczne ostrosłupa o podstawie prostokątnej mają długości a , b , c i d . Udowodnij, że $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

Rozwiązanie:

Zastosujemy rachunek wektorów. Przyjmijmy oznaczenia jak na rycinie 5.125. Wówczas:

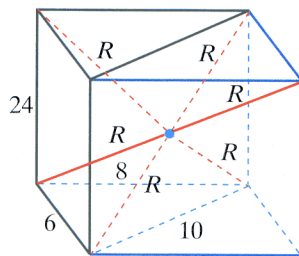
$$a^2 + c^2 = \vec{a}^2 + \vec{c}^2 = (\vec{r} + \vec{t})^2 + (\vec{r} - \vec{t})^2 = \\ = 2\vec{r}^2 + 2\vec{t}^2 = 2r^2 + 2t^2 = 2r^2 + 2s^2 = \\ = 2\vec{r}^2 + 2\vec{s}^2 = (\vec{r} + \vec{s})^2 + (\vec{r} - \vec{s})^2 = \vec{d}^2 + \vec{b}^2 = d^2 + b^2, \text{ gdyż}$$

$$\vec{t} = \vec{OA}, \vec{s} = \vec{OD}, \text{ a ponieważ } OA = OD, \text{ więc } t = s.$$

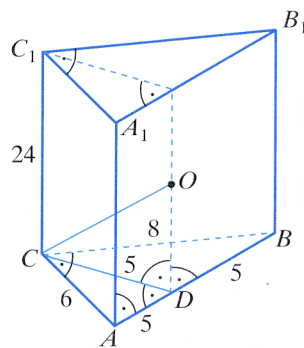
Przykład 8. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej prawidłowego ostrosłupa czworokątnego, którego wysokość i krawędź boczna mają długości odpowiednio 3 cm i 5 cm.

Rozwiązanie:

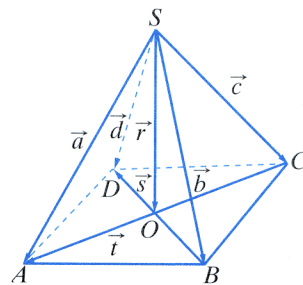
Niech $SABCD$ będzie ostrosłupem prawidłowym, którego podstawą jest kwadrat $ABCD$ o przekątnych przecinających się w punkcie O (ryc. 5.126).



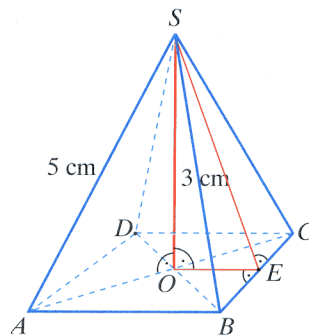
Ryc. 5.123.



Ryc. 5.124.



Ryc. 5.125.



Ryc. 5.126.

Z zadania wiemy, że $SA = SB = SC = SD = 5$ cm, a wysokość $SO = 3$ cm. Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta AOS , obliczamy: $AO = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$, więc $AC = 2AO = 2 \cdot 4 = 8$. Ponieważ w kwadracie $ABCD$ odcinek AB jest jego bokiem, zaś AC – jego przekątną, więc $AC = AB\sqrt{2}$; stąd $AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot AC = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 8 = 4\sqrt{2}$ oraz $OE = \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{2}$. Na tej podstawie obliczamy wysokość ściany bocznej BSC tego ostrosłupa: $SE = \sqrt{SO^2 + OE^2} = \sqrt{3^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{17}$. Zatem objętość tego ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot AB^2 \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot (4\sqrt{2})^2 \cdot 3 = 32, \text{ a jego pole powierzchni całkowitej:}$$

$$S_c = AB^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot SE = (4\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{17} = 32 + 8\sqrt{34} = 8(4 + \sqrt{34}).$$

Odpowiedź: $V = 32 \text{ cm}^3$, $S_c = 8(4 + \sqrt{34}) \text{ cm}^2$.

Przykład 9. Oblicz długość promienia kuli opisanej na prawidłowym ostrosłupie czworokątnym, którego krawędź podstawy ma długość 2, a długość krawędzi bocznej wynosi $\sqrt{6}$.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia jak na rycinie 5.127. Z zadania wynika, że $AB = 2$, $AS = \sqrt{6}$, a na podstawie prawidłowości danego ostrosłupa wnioskujemy, że środek O opisanej na nim kuli leży na wysokości tego ostrosłupa. Ponieważ $AH = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AB\sqrt{2} = \sqrt{2}$,

więc $SH = \sqrt{AS^2 - AH^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{4} = 2$. Wobec tego

$R^2 = AO^2 = AH^2 + HO^2 = AH^2 + (SH - R)^2 = 2^2 + (2 - R)^2$, czyli $R^2 = 2 + (2 - R)^2$, skąd kolejno: $R^2 - (2 - R)^2 = 2, (R - (2 - R))(R + (2 - R)) = 2, (2R - 2) \cdot 2 = 2, 2(R - 1) = 1, R - 1 = \frac{1}{2}$ i ostatecznie $R = \frac{3}{2}$.

Odpowiedź: Promień kuli opisanej na ostrosłupie ma długość $\frac{3}{2}$.

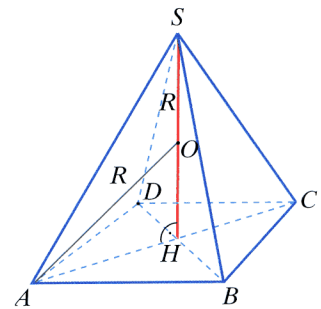
Uwaga. Nietrudno dowieść, że na ostrosłupie można opisać kulę wtedy i tylko wtedy, gdy jego podstawą jest wielokąt, który można wpisać w okrąg.

Istotnie, gdy na ostrosłupie można opisać kulę, to teza jest oczywista. Załóżmy więc, że podstawą ostrosłupa jest wielokąt, który można wpisać w okrąg. Poprowadźmy przez środek tego okręgu prostą prostopadłą do podstawy ostrosłupa. Wówczas zauważymy, że każdy punkt tej prostej jest równo odległy od wszystkich wierzchołków tej podstawy. Wystarczy zatem obrać na tej prostej taki punkt, którego odległość od wierzchołka ostrosłupa będzie równa jego odległości od wszystkich wierzchołków podstawy (wykonaj odpowiednią rycinę!).

Stąd wynika, że kulę można opisać na:

- każdym ostrosłupie trójkątnym,
- każdym ostrosłupie prawidłowym.

Przykład 10*. Sześcian $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ przecięto płaszczyzną wyznaczoną przez przekątną AC dolnej podstawy i środki krawędzi $A_1 D_1$ i $C_1 D_1$ górnej podstawy. Udowodnij, że przekątne otrzymanego przekroju są prostopadłe.



Ryc. 5.127.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy, że krawędź tego sześcianu ma długość a .

Wówczas (ryc. 5.128) $AC = a\sqrt{2}$, $EH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Zauważmy, że rozważany przekrój jest trapezem równoramiennym $ACHE$ o ramionach AE i CH oraz o podstawach AC i EH . Trójkąty AOC i EOH są podobne w skali $\frac{AC}{EH} = 2$, więc $OG = 2OK$. Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta AEF , otrzymujemy: $EF^2 = AE^2 - AF^2$. Ponieważ

$$AF = AG - FG = \frac{1}{2}(AC - EH) = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

oraz $AE^2 = AA_1^2 + A_1E^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5}{4}a^2$, więc $EF^2 = \frac{5}{4}a^2 - \frac{a^2}{8} = \frac{9}{8}a^2$, skąd $EF = \frac{3\sqrt{2}}{4}a$.

Ponadto: $EF = KG$ oraz $OK = \frac{1}{3}KG = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4}a = \frac{\sqrt{2}}{4}a$. Zatem w trójkącie EOK mamy

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{EK}{OK} = \frac{EH}{2OK} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a\sqrt{2}}{2} = 1$, skąd $\alpha = 45^\circ$ i ostatecznie $\sphericalangle EOH = 2\alpha = 90^\circ$, co kończy dowód tezy zadania.

Przykład 11. Ostrosłup prawidłowy czworokątny $SABCD$ przecięto płaszczyzną równoległą do ściany ASD , rozłączną z nią. Udowodnij, że otrzymany przekrój jest trapezem.

Rozwiązanie:

Niech poprowadzona płaszczyzna przecina krawędzie AB , CD , SC i SB danego ostrosłupa w punktach odpowiednio K , L , M i N (ryc. 5.129).

Z równoległości tej płaszczyzny do ściany ASD wynika oczywiście równoległość odcinków KL i AD . Ponieważ AD jest równoległy do BC (gdyż podstawą ostrosłupa jest kwadrat), to KL jest równoległy do BC . Płaszczyzna przekroju zawierająca prostą KL , równoległą do BC , jest równoległa do BC . Stąd wynika, że odcinki MN i BC leżące na płaszczyźnie BSC są równoległe. Wobec tego odcinki KL i MN też są równoległe. Czworokąt $KLMN$ jest więc trapezem.

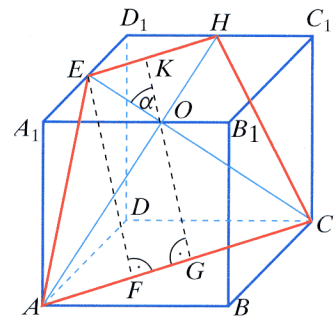
Przykład 12. Udowodnij, że objętość V , pole S_b powierzchni bocznej i pole S_c powierzchni całkowitej stożka ściętego o promieniu długości R podstawy dolnej, promieniu długości r podstawy górnej, wysokości h i długości l , wyrażają się wzorami:

$$V = \frac{1}{3} \pi (R^2 + Rr + r^2) h; \quad S_b = \pi (R + r) l;$$

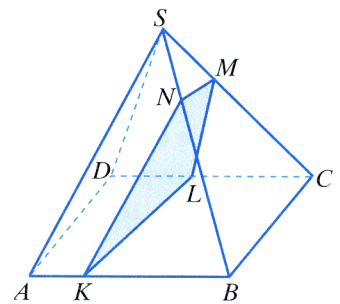
$$S_c = \pi R^2 + \pi (R + r) l + \pi r^2.$$

Rozwiązanie:

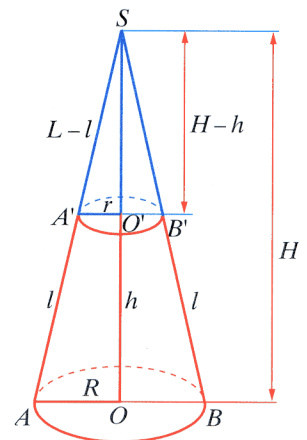
Uzupełnijmy dany stożek ścięty do stożka pełnego i rozważmy przekrój osiowy tych stożków (ryc. 5.130).



Ryc. 5.128.



Ryc. 5.129.



Ryc. 5.130.

Z podobieństwa trójkątów AOS i $A'O'S$ wynikają związki: $\frac{H-h}{H} = \frac{r}{R} = \frac{L-l}{L}$, a z nich – związki: $(*) H = \frac{hR}{R-r}$; $(**) L = \frac{lR}{R-r}$. Wobec tego otrzymujemy:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H - \frac{1}{3} \pi r^2 (H-h) = \frac{1}{3} \pi (R^2 - r^2) H + \frac{1}{3} \pi r^2 h \stackrel{(*)}{=}$$

$$\stackrel{(**)}{=} \frac{1}{3} \pi (R-r)(R+r) \cdot \frac{hR}{R-r} + \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (R+r) h R + \frac{1}{3} \pi r^2 h =$$

$$= \frac{1}{3} \pi (R^2 + Rr + r^2) h;$$

$$S_b = \pi R L - \pi r (L-l) = \pi (R-r) L + \pi r l \stackrel{(**)}{=} \pi (R-r) \frac{lR}{R-r} + \pi r l =$$

$$= \pi R l + \pi r l = \pi (R+r) l;$$

$$S_c = \pi R^2 + \pi (R+r) l + \pi r^2.$$



Pytania i zadania

- Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej walca, którego podstawa ma promień długości r , a przekątna przekroju osiowego jest nachylona do podstawy pod kątem α .
- Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót trapezu prostokątnego o podstawach długości 9 i 13 oraz o wysokości równej 3 dokoła:
 - dłuższej podstawy,
 - krótszej podstawy.
- Na walcu opisano kulę o objętości $\frac{32}{3} \pi$. Promień kuli jest nachylony do podstawy walca pod kątem 30° . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego walca.
- W kulę o promieniu długości R wpisano stożek. Kąt rozwarcia stożka wynosi 120° . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.
- Wyznacz długości krawędzi graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o objętości $3\sqrt{3}$ i polu powierzchni bocznej wynoszącym 18.
- Na graniastosłupie prawidłowym trójkątnym, którego wszystkie krawędzie są równej długości, opisano kulę o promieniu długości $\sqrt{7}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.
- Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy długości 6 i kącie nachylenia każdej krawędzi bocznej do podstawy równym 30° .
- Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o wysokości 3, wpisanego w kulę o promieniu długości 2.
- Wyznacz miarę kąta nachylenia płaszczyzny, wyznaczonej przez przekątną BD podstawy $ABCD$ sześcianu $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ i jego wierzchołek A_1 , do tej podstawy.
- Wyznacz miarę kąta dwuściennego ścian czworobocianu foremnego.
- Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $SABCD$, którego wszystkie krawędzie są długości 10. Oblicz pole przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną zawierającą przekątną AC jego podstawy $ABCD$ i równoległą do krawędzi bocznej SD .
- Łącząc środki dwóch przeciwległych ścian sześcianu ze środkami krawędzi nienależących do tych ścian odcinkami, otrzymamy szkielet ośmiościanu foremnego. Ile razy jego objętość jest mniejsza od objętości sześcianu?

VI. Elementy rachunku prawdopodobieństwa

1. Pojęcie silni. Permutacje zbioru skończonego

Zapoznajmy się z pojęciem silni:

Dla dowolnej liczby naturalnej n określamy symbol $n!$ (czyt.: „ n silnia”) jako:

- a) iloczyn wszystkich liczb naturalnych od 1 do n , to jest: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$, gdy $n \geq 2$;
b) liczbę 1, gdy $n = 0$ lub $n = 1$.

Zgodnie zatem z definicją:

$$0! = 1, 1! = 1, 2! = 1 \cdot 2 = 2, 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \text{ itd.}$$

Przykład 1. Skróć ułamek $\frac{8!}{6!}$.

Rozwiązanie:

$$\frac{8!}{6!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8}{6!} = 7 \cdot 8 = 56.$$

Przykład 2. Skróć ułamek $\frac{6!}{9!}$.

Rozwiązanie: $\frac{6!}{9!} = \frac{6!}{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{1}{7 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{1}{504}$.

Przykład 3. Uprość ułamek $\frac{5! + 4!}{5! - 4!}$.

Rozwiązanie:

$$\frac{5! + 4!}{5! - 4!} = \frac{4! \cdot 5 + 4!}{4! \cdot 5 - 4!} = \frac{4!(5+1)}{4!(5-1)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Przykład 4. Uprość wyrażenie $\frac{(n-1)!(n+1)!}{(n!)^2}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $(n!)^2 = n! \cdot n!$, $n! = (n-1)! \cdot n$ i $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$,

więc $\frac{(n-1)!(n+1)!}{(n!)^2} = \frac{(n-1)! \cdot n! \cdot (n+1)}{(n-1)! \cdot n \cdot n!} = \frac{n+1}{n}$.

Przykład 5. Oblicz $(3!)!$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, więc $(3!)! = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Dla każdej dodatniej liczby naturalnej n określamy symbolem $n!!$ iloczyn:

- a) $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot n$, gdy n jest liczbą parzystą;
b) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot n$, gdy n jest liczbą nieparzystą.

Tak więc dla liczb parzystych:

$$2!! = 2, 4!! = 2 \cdot 4 = 8, 6!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48, 8!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = 384 \text{ i ogólnie:}$$

$$(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (2k-4)(2k-2)(2k), \text{ dla } k = 1, 2, 3, \dots$$

Natomiast dla liczb nieparzystych:

$1!! = 1$, $3!! = 1 \cdot 3 = 3$, $5!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$, $7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ i ogólnie:

$(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2k-5)(2k-3)(2k-1)$, dla $k = 1, 2, 3, \dots$

Przykład 6. Skróć ułamek $\frac{10!!}{6!!}$.

Rozwiązanie:

$$\frac{10!!}{6!!} = \frac{6!! \cdot 8 \cdot 10}{6!!} = 8 \cdot 10 = 80.$$

Przykład 7. Skróć ułamek $\frac{8!!}{8!}$.

Rozwiązanie:

$$\frac{8!!}{8!} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{1}{105}.$$

Przykład 8* Skróć ułamek $\frac{(2n)!!}{n!}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ:

$$\begin{aligned} (2n)!! &= 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2)(2n) = (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdot \dots \cdot (2 \cdot (n-1)) \cdot (2n) = \\ &= \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2)}_n \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n) = 2^n \cdot n!, \text{ więc } \frac{(2n)!!}{n!} = \frac{2^n \cdot n!}{n!} = 2^n. \end{aligned}$$

Permutacje

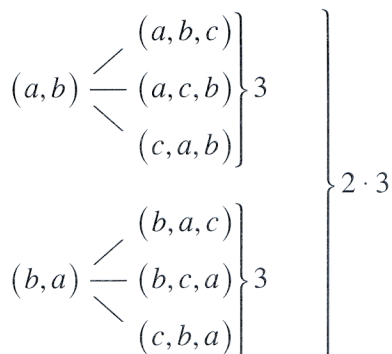
Przejdźmy teraz do rozważań dotyczących zbiorów.

Permutacją zbioru n -elementowego nazywamy każdy ciąg n -wyrazowy utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru.

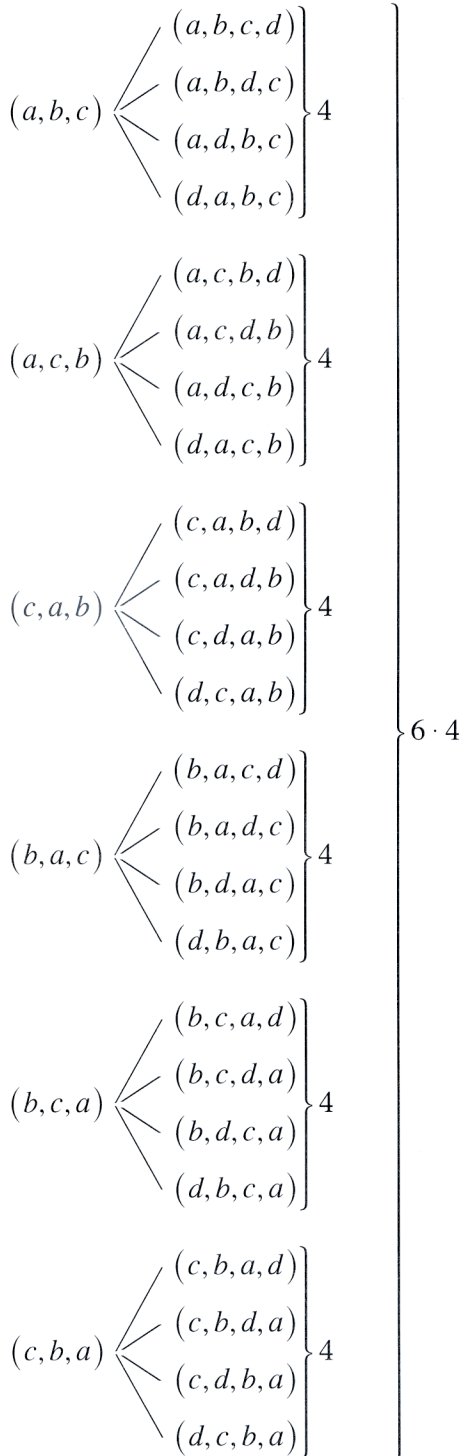
Inaczej mówiąc, **permutacją zbioru skończonego** nazywamy dowolne uporządkowanie wszystkich jego elementów. Dwie permutacje zbioru uznajemy za różne, gdy co najmniej dwa jego elementy występują w nich w różnej kolejności.

Prześledźmy to na następujących przykładach:

- Zbiór dwuelementowy $\{a, b\}$ można uporządkować dwójako: (a, b) , co oznacza, że a poprzedza b , albo (b, a) , czyli, b jest przed a .
- Z elementów zbioru $\{a, b, c\}$ możemy utworzyć sześć ciągów trójwyrazowych: (a, b, c) , (a, c, b) , (c, a, b) , (b, a, c) , (b, c, a) , (c, b, a) , dołączając do każdego z ciągów (a, b) i (b, a) trzeci element c na jeden z trzech sposobów. Pokazuje to schemat:



3. Wszystkie permutacje zbioru $\{a, b, c, d\}$ otrzymamy, gdy do każdej permutacji zbioru $\{a, b, c\}$ dołączymy element d na jeden z czterech sposobów. Przedstawia to schemat:



Widzimy zatem, że wszystkich permutacji czteroelementowego zbioru jest $24 = 6 \cdot 4$.

Oznaczmy liczbę permutacji zbioru n -elementowego symbolem P_n . Istnieje tylko jedna permutacja zbioru jednoelementowego:

$$P_1 = 1.$$

Dołączając do niej na dwa sposoby drugi element, otrzymamy permutacje zbioru dwuelementowego:

$$P_2 = P_1 \cdot 2 = 1 \cdot 2.$$

Każda z tych permutacji po dołączeniu do niej na trzy sposoby trzeciego elementu daje trzy permutacje zbioru trzejelementowego:

$$P_3 = P_2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3.$$

Gdy do każdej takiej permutacji dołączymy na cztery sposoby czwarty element, otrzymamy wszystkie permutacje zbioru czteroelementowego:

$$P_4 = P_3 \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \text{ itd.}$$

Jeśli powyższą zasadę zastosujemy w zbiorze n -elementowym, wówczas okaże się, że wszystkich permutacji zbioru n -elementowego jest $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$, co krócej można zapisać następująco:

$$P_n = n!.$$

Prawdziwe jest zatem następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Liczbę P_n wszystkich permutacji zbioru n -elementowego obliczamy ze wzoru: $P_n = n!$.

□* Oto formalny dowód indukcyjny tego wzoru.

1. Sprawdzenie dla $n = 1$. Zbiór jednoelementowy można uporządkować tylko w jeden sposób, więc $P_1 = 1 = 1!$.
2. Wykażemy, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n , jeśli $P_n = n!$, to $P_{n+1} = (n+1)!$. Istotnie, każda permutacja zbioru n -elementowego, po dołączeniu do niej jeszcze jednego elementu na którekolwiek z $n+1$ miejsc, wyznacza $n+1$ permutacji zbioru liczącego $(n+1)$ elementów. Na przykład permutacja $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$, po dołączeniu do niej elementu a_{n+1} , wyznacza $n+1$ permutacji zbioru $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}\}$; są nimi:

$$\begin{aligned} & (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, \boxed{a_{n+1}}), (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, \boxed{a_{n+1}}, a_n), \\ & (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, \boxed{a_{n+1}}, a_{n-1}, a_n), (a_1, a_2, a_3, \dots, \boxed{a_{n+1}}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) \text{ itd.}, \\ & (a_1, a_2, \boxed{a_{n+1}}, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n), (a_1, \boxed{a_{n+1}}, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n), \\ & (\boxed{a_{n+1}}, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n). \end{aligned}$$

Podobnie postępujemy z każdą z pozostałych permutacji zbioru $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. A ponieważ jest ich wszystkich $n!$, więc $P_{n+1} = P_n \cdot (n+1) = n!(n+1) = (n+1)!$.

Zatem na mocy indukcji matematycznej stwierdzamy, że dowodzony wzór zachodzi dla każdej dodatniej liczby naturalnej n . □

Przykład 1. W biegu na 100 m wzięło udział pięciu zawodników. Na ile sposobów mogą oni dobiec do mety, jeśli założymy, że żadni dwaj z nich nie znajdują się na niej jednocześnie?

Rozwiązanie:

Nietrudno zauważyć, że każda możliwa kolejność, w której zawodnicy dobiegną do mety, odpowiada pewnej permutacji zbioru pięcioelementowego; i na odwrót, każda permutacja zbioru pięcioelementowego odpowiada pewnej kolejności, w jakiej znajdują się oni na mecie. Zawodnicy mogą zatem dobiec do mety na $5! = 120$ sposobów.

Przykład 2. Z cyfr $\{1, 2, 3, 4\}$ układamy czterocyfrowe liczby o różnych cyfrach. Ile takich liczb możemy ułożyć?

Rozwiązanie:

Każda czterocyfrowa liczba o różnych cyfrach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ odpowiada pewnej permutacji tego zbioru, na przykład liczba 4231 odpowiada permutacji $(4, 2, 3, 1)$.

Na odwrót, każda permutacja tego zbioru wyznacza pewną czterocyfrową liczbę o różnych cyfrach z tego zbioru, na przykład permutacja $(2, 4, 3, 1)$ wyznacza liczbę 2431. Zatem liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ można ułożyć $4! = 24$.

Przykład 3. Pewna rodzina składa się z siedmiorga osób: dziadków, rodziców i trojga dzieci. Wszyscy ustawiają się do rodzinnej fotografii w ten sposób, aby dzieci były na niej w pierwszym rzędzie, a dorośli – w drugim. Ile różnych fotografii może powstać?

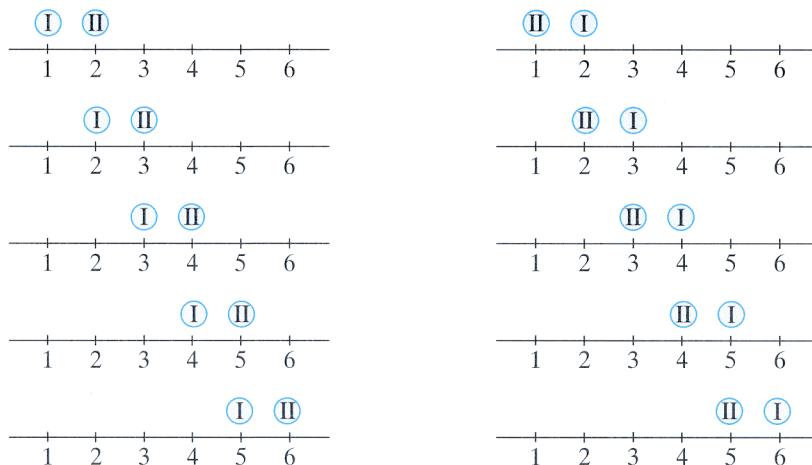
Rozwiązanie:

Oczywiście zdjęć będzie tyle, ile jest różnych sposobów ustawienia dzieci i dorosłych odpowiednio w pierwszym i drugim rzędzie. Dzieci mogą ustawić się do fotografii na $3!$ sposobów i przy każdym z tych sposobów dorośli mogą stanąć na $4!$ sposobów. Zatem wszystkich możliwych ustawień rodziny do wspólnego zdjęcia jest $3! \cdot 4! = 6 \cdot 24 = 144$.

Przykład 4. Ile jest sposobów ustawienia na półce sześciotomowej encyklopedii tak, aby tomy I i II stały obok siebie?

Rozwiązanie:

Miejsca, które zajmą tomy tej encyklopedii na półce, ponumerujemy cyframi od 1 do 6. Tomy I i II mogą stać obok siebie w kolejności I, II lub II, I i zmieniać numery swoich miejsc na pięć sposobów, zajmując miejsca: 1 i 2, 2 i 3, 3 i 4, 4 i 5 lub 5 i 6 (ryc. 6.1).



Ryc. 6.1.

Pozostałe cztery tomy ustawiamy na wolnych miejscach dowolnie i możliwości tych jest $4!$ (tyle, ile permutacji zbioru czteroelementowego). Wobec tego sześciotomową encyklopedię możemy ustawić na półce tak, aby tomy I i II stały obok siebie na $2! \cdot 4! \cdot 5 = 2! \cdot 5! = 2 \cdot 120 = 240$ sposobów.



Pytania i zadania

- Podaj określenie symbolu $n!$.
- Zapisz w prostszej postaci:

a) $4! \cdot 5$;	b) $7! \cdot 8 \cdot 9$;	c) $(n-2)!(n-1)$;	d) $n!(n+1)(n+2)$;
e) $\frac{9!}{9}$;	f) $\frac{12!}{11 \cdot 12}$;	g) $\frac{(n-1)!}{n!}$;	h) $\frac{(n+1)!}{n(n+1)}$;
i) $\frac{10!}{9!}$;	j) $\frac{(n+1)!}{n!}$;	k) $\frac{(n-4)!}{(n-5)!}$;	l) $\frac{(n-k)!}{(n-k-1)!}$;
- Zapisz w prostszej postaci:

a) $\frac{5!}{2! \cdot 3!}$;	b) $\frac{8!}{5! \cdot 3!}$;	c) $\frac{6! + 5!}{6! - 5!}$;	d) $\frac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!}$;
-------------------------------	-------------------------------	--------------------------------	--
- Co to jest permutacja zbioru skończonego?
- Ile jest wszystkich permutacji zbioru n -elementowego?
- Na ile sposobów pięć osób może zająć pięć ponumerowanych miejsc?
- Z urny wyjmujemy kolejno siedem ponumerowanych kul. Na ile sposobów możemy to uczynić?
- Z autobusu wysiada 10 osób. Najpierw wychodzą panie, których jest 6, a za nimi 4 panowie. Jeśli uwzględnimy ten porządek, to na ile różnych sposobów opisane towarzystwo może opuścić autobus?
- Na ile sposobów możemy ustawić na półce sześciotomową encyklopedię, aby tomy II i III nie stały obok siebie?

2. Symbol Newtona. Kombinacje zbioru skończonego

Symbol Newtona

Niech n i k będą dowolnymi liczbami naturalnymi.

Wyrażenie $\binom{n}{k}$ (czyt.: „ n nad k ” lub „ n po k ”) określone wzorem:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{gd}y \quad 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{gd}y \quad k > n, \end{cases}$$

nazywamy **symbolem Newtona**.

Oto kilka przykładów:

$$\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{5! \cdot 2} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 3 \cdot 7 = 21;$$

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 5 \cdot 3 = 15;$$

$$\binom{8}{0} = \frac{8!}{0!(8-0)!} = \frac{8!}{0! \cdot 8!} = \frac{8!}{8!} = 1;$$

$$\binom{5}{5} = \frac{5!}{5!(5-5)!} = \frac{5!}{5! \cdot 0!} = \frac{5!}{5!} = 1;$$

$$\binom{2}{4} = 0, \text{ bo } 4 > 2.$$

Z przytoczonych przykładów wynika, że:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = \frac{n!}{n!} = 1;$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

Porównajmy:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n}; \quad \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-1)!} = n \text{ oraz}$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)![n-(n-1)]!} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = \frac{n!}{(n-1)!} = n, \text{ więc } \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}.$$

Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.

Dla każdej liczby naturalnej n i każdej liczby naturalnej k takiej, że $0 \leq k \leq n$, zachodzi równość $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Dowód. Ponieważ $k = n - (n - k)$, więc:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \binom{n}{n-k}. \quad \square$$

Tak więc na przykład:

$$\binom{8}{5} = \binom{8}{3}, \quad \binom{10}{4} = \binom{10}{6}, \quad \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}, \text{ gdy } n \geq 2.$$

Rozpatrzmy sumę dwóch wyrażeń, będących symbolami Newtona:

$$\binom{8}{3} + \binom{8}{4} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} + \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{8! \cdot 4 + 8! \cdot 5}{4! \cdot 5!} = \frac{8! \cdot 9}{4! \cdot 5!} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \binom{9}{4};$$

$$\binom{9}{6} + \binom{9}{7} = \frac{9!}{6! \cdot 3!} + \frac{9!}{7! \cdot 2!} = \frac{9! \cdot 7 + 9! \cdot 3}{7! \cdot 3!} = \frac{9! \cdot 10}{7! \cdot 3!} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \binom{10}{7}.$$

Prawdziwe jest kolejne twierdzenie:

Twierdzenie 2.

Dla każdej liczby naturalnej n i każdej liczby naturalnej k takiej, że $0 \leq k < n$, zachodzi równość $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

□ Dowód.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)![n-(k+1)]!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \\ &= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \\ &= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)![n-(k+1)]!} = \binom{n+1}{k+1}. \quad \square \end{aligned}$$

Oto przykłady działań, w których zastosowano omawiane twierdzenie:

$$\binom{7}{5} + \binom{7}{6} = \binom{8}{6}; \quad \binom{10}{4} + \binom{10}{5} = \binom{11}{5}; \quad \binom{n}{3} + \binom{n}{4} = \binom{n+1}{4}.$$

Kombinacje zbioru skończonego

Niech A będzie zbiorem n -elementowym.

Kombinacją k elementów spośród n elementów (gdzie k i n są liczbami naturalnymi, przy czym $0 \leq k \leq n$) nazywamy każdy k -elementowy podzbiór zbioru A . Dwie kombinacje zbioru A uznajemy za różne, gdy różnią się co najmniej jednym elementem.

Liczbę kombinacji k elementów spośród n elementów będziemy oznaczać symbolem C_n^k .

Przykład 1. Dany jest zbiór $A = \{a, b, c, d\}$. Wypisz wszystkie kombinacje tego zbioru.

Rozwiązanie:

Zbiór pusty jest oczywiście zeroelementową kombinacją zbioru A . Taka kombinacja jest naturalnie tylko jedna, więc $C_4^0 = 1$; zbiory: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$ są jednoelementowymi kombinacjami zbioru A , stąd $C_4^1 = 4$. Zbiory: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$ stanowią wszystkie dwuelementowe kombinacje zbioru A , zatem $C_4^2 = 6$. Zbiory: $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$ są wszystkimi trójelementowymi kombinacjami zbioru A , mamy więc $C_4^3 = 4$. Cały zbiór A jest jedyną czteroelementową kombinacją tego zbioru: $C_4^4 = 1$.

Powstaje pytanie: jak wyznaczyć liczbę k -elementowych kombinacji danego zbioru n -elementowego A ?

Gdy $k = 0$, mamy tylko jedną zeroelementową kombinację (zbiór pusty!) zbioru n -elementowego. Zatem:

$$C_n^0 = 1.$$

Gdy $k = 1$, wówczas także łatwo obliczyć, że jednoelementowych kombinacji jest n (tyle, ile elementów ma dany zbiór). Tak więc:

$$C_n^1 = n.$$

Rozważmy teraz, ile jest dwuelementowych kombinacji zbioru n -elementowego.

Najpierw wybieramy jeden element. Możliwości wyboru jest n (tyle, ile elementów ma zbiór A). Następnie wybieramy drugi element spośród pozostałych $n - 1$ elementów w zbiorze A . Wszystkich możliwości takiego wyboru dwóch elementów zbioru A jest więc $n(n - 1)$. Zauważcie jednak, że w liczbie tej każdy dwuelementowy podzbiór zbioru A jest liczony dwukrotnie, na przykład zbiór $\{a, b\}$ pierwszy raz otrzymujemy, wybierając ze zbioru A najpierw a i następnie b , drugi zaś raz – gdy najpierw wybierzemy b , a następnie a . Wobec tego wszystkich dwuelementowych kombinacji zbioru A jest $\frac{n(n - 1)}{2}$, zatem:

$$C_n^2 = \frac{n(n - 1)}{2}.$$

Dołączając do każdej dwuelementowej kombinacji zbioru A trzeci element spośród pozostałych $n - 2$ elementów tego zbioru, otrzymujemy trójelementową kombinację zbioru A . Wszystkich możliwości takiego wyboru trzech elementów zbioru A jest więc $\frac{n(n - 1)(n - 2)}{2}$. Jednak w liczbie tej każda trójelementowa kombinacja zbioru A jest liczona trzykrotnie, bowiem na przykład kombinację $\{a, b, c\}$ otrzymujemy, dołączając c do $\{a, b\}$, b do $\{a, c\}$ i a do $\{b, c\}$. Wobec tego wszystkich trójelementowych kombinacji zbioru A jest $\frac{n(n - 1)(n - 2)}{6}$, stąd:

$$C_n^3 = \frac{n(n - 1)(n - 2)}{6}.$$

Zauważmy, że otrzymane liczby C_n^0 , C_n^1 , C_n^2 i C_n^3 możemy zapisać następująco:

$$C_n^0 = 1 = \binom{n}{0};$$

$$C_n^1 = n = \frac{n}{1} = \frac{n}{1!} \cdot \frac{(n - 1)!}{(n - 1)!} = \frac{n!}{1!(n - 1)!} = \binom{n}{1};$$

$$C_n^2 = \frac{n(n - 1)}{2} = \frac{n(n - 1)}{2!} \cdot \frac{(n - 2)!}{(n - 2)!} = \frac{n!}{2!(n - 2)!} = \binom{n}{2};$$

$$C_n^3 = \frac{n(n - 1)(n - 2)}{6} = \frac{n(n - 1)(n - 2)}{3!} \cdot \frac{(n - 3)!}{(n - 3)!} = \frac{n!}{3!(n - 3)!} = \binom{n}{3}.$$

Przeprowadzając podobne rozumowanie dla dowolnego $k \leq n$, otrzymamy następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Jeżeli n i k są dowolnymi liczbami naturalnymi i $k \leq n$, to liczba k -elementowych kombinacji zbioru n -elementowego wyraża się wzorem:

$$C_n^k = \binom{n}{k}.$$

□ * Dowód. Zastosujemy indukcję matematyczną. Niech n będzie ustaloną liczbą.

1. Gdy $k = 0, 1, 2$ lub 3 , to twierdzenie jest prawdziwe, ponieważ wiemy już, że:

$$C_n^0 = \binom{n}{0}, C_n^1 = \binom{n}{1}, C_n^2 = \binom{n}{2} \text{ i } C_n^3 = \binom{n}{3}.$$

2. Zakładając, że $1 \leq k < n$ i $C_n^k = \binom{n}{k}$, wykażemy, że $C_n^{k+1} = \binom{n}{k+1}$.

Istotnie, dołączając do każdej k -elementowej kombinacji jeden element spośród $n - k$ elementów, które do niej nie należą, otrzymamy $(n - k)C_n^k$ kombinacji liczących $(k + 1)$ elementów. Przy tym w liczbie $(n - k)C_n^k$ każda z kombinacji k -elementowych powtarza się $k + 1$ razy, gdyż każdy jej element dołączaliśmy do kombinacji k pozostałych elementów.

Wobec tego $C_n^{k+1} = \frac{(n - k)C_n^k}{k + 1}$. A ponieważ $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}$, więc:

$$C_n^{k+1} = \frac{(n - k)n!}{(k + 1)k!(n - k)!} = \frac{n!}{(k + 1)!(n - k - 1)!} = \frac{n!}{(k + 1)!(n - (k + 1))!} = \binom{n}{k + 1}.$$

Tym samym na mocy indukcji matematycznej stwierdzamy, że dowodzony wzór jest prawdziwy dla dowolnej liczby naturalnej n i liczby naturalnej k takiej, że $0 \leq k \leq n$. □

Przykład 2. Z klasy liczącej 20 uczniów należy wytypować czteroosobową delegację do samorządu szkolnego. Ile takich delegacji można utworzyć?

Rozwiązanie:

Każda delegacja czworga uczniów spośród 20 w tej klasie to czteroelementowa kombinacja zbioru dwudziestoelementowego. Wszystkich delegacji, o których mowa w zadaniu, jest więc $C_{20}^4 = \binom{20}{4} = \frac{20!}{4! \cdot 16!} = \frac{17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 = 4845$.

Przykład 3. W urnie znajduje się osiem kul ponumerowanych od 1 do 8. Losujemy pięć kul bez ponownego wrzucania ich do urny. Ile jest możliwych wyników losowania?

Rozwiązanie:

Losowanie pięciu kul spośród ośmiu bez ponownego wrzucania jest wyborem dowolnych pięciu różnych kul spośród ośmiu, czyli pięcioelementową kombinacją zbioru ośmioelementowego. Wobec tego wszystkich możliwych wyników tego losowania jest:

$$C_8^5 = \binom{8}{5} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{5! \cdot 6} = 7 \cdot 8 = 56.$$

Przykład 4. Ile wśród wszystkich skreśleń sześciu liczb z 49 (od 1 do 49) jest takich, które gwarantują trafienie „piątki” w losowaniu Dużego Lotka?

Rozwiązanie:

Gra w Dużego Lotka w najprostszej postaci polega na wytypowaniu (skreśleniu na specjalnym kuponie) sześciu spośród 49 liczb od 1 do 49. Następnie odbywa się losowanie sześciu liczb. Aby trafić „piątkę”, trzeba stwierdzić na swoim kuponie pięć liczb spośród sześciu otrzymanych w publicznym losowaniu. Pięć liczb z sześciu możemy wybrać na $C_6^5 = \binom{6}{5} = 6$ sposobów. Ponieważ jedną liczbą na naszym kuponie może być dowolna z 43 niewylosowanych, dlatego wszystkich skreśleń sześciu liczb, przy których trafimy „piątkę”, jest $43 \cdot 6 = 258$.

Przykład 5. Ile partii rozegrano w turnieju szachowym, w którym wzięło udział 15 osób i każda rozegrała z każdą jeden mecz?

Rozwiązanie:

W każdej rozegranej partii brały udział dwie osoby i każde dwie rozegrały jedną partię. Wobec tego liczba rozegranych partii odpowiada liczbie wyboru dwóch osób spośród 15, a ta – jest równa liczbie dwuelementowych kombinacji zbioru piętnastoelementowego, czyli liczbie:

$$C_{15}^2 = \binom{15}{2} = \frac{14 \cdot 15}{2} = 7 \cdot 15 = 105.$$

Przykład 6. Z talii 52 kart wyciągamy losowo 5 kart. Ile jest możliwych wyników losowania, takich aby otrzymać dwa asy i trzy króle?

Rozwiązanie:

W talii tej mamy oczywiście cztery asy i cztery króle. Dwa asy spośród czterech możemy wylosować na $C_4^2 = \binom{4}{2} = 6$ sposobów, zaś trzy króle spośród czterech na $C_4^3 = \binom{4}{3} = 4$ sposoby. Jeśli zatem chcemy wylosować pięć kart, tak aby wśród nich znalazły się dwa asy i trzy króle, musimy wykonać tę czynność na $C_4^2 \cdot C_4^3 = 6 \cdot 4 = 24$ sposoby, gdyż do każdego dwóch asów możemy dobrać trzy króle na 4 sposoby, możliwości zaś wyboru dwóch asów spośród czterech jest 6.

Przykład 7. Ile prostych można przeprowadzić przez sześć punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej?

Rozwiązanie:

Wybieramy dowolnie dwa punkty i prowadzimy przez nie prostą. Ponieważ żadne trzy punkty spośród danych nie leżą na jednej prostej, więc żadne dwie proste, wyznaczone przez różne pary punktów spośród danych, się nie pokrywają. Zatem liczba prostych, które można przeprowadzić przez danych sześć punktów, odpowiada liczbie wyborów dwóch punktów spośród sześciu danych, czyli liczbie dwuelementowych kombinacji zbioru sześciuelementowego, a więc liczbie:

$$C_6^2 = \binom{6}{2} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15.$$

Przykład 8. Ile płaszczyzn można przeprowadzić przez siedem punktów, z których żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie?

Rozwiązanie:

Jeśli żadne cztery punkty spośród danych nie leżą na jednej płaszczyźnie, to żadne trzy spośród nich nie mogą leżeć na jednej prostej. Każde trzy takie punkty wyznaczają jedną płaszczyznę i oczywiście żadne dwie płaszczyzny, przeprowadzone przez różne trzy punkty spośród danych, się nie pokrywają. Wobec tego poszukiwana liczba płaszczyzn odpowiada liczbie wyborów trzech punktów spośród danych siedmiu, czyli liczbie trójelementowych kombinacji zbioru siedmioelementowego, a więc liczbie:

$$C_7^3 = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{3! \cdot 4!} = 5 \cdot 7 = 35.$$

Przykład 9. Na ile sposobów można podzielić grupę 10 osób na dwie równoliczne grupy?

Rozwiązanie:

Wybierając grupę 5 osób, otrzymujemy jednocześnie drugą grupę pozostałych 5 osób.

Wyborów 5 osób spośród 10 jest oczywiście $C_{10}^5 = \binom{10}{5}$. Liczba ta jest jednak dwa razy mniejsza niż liczba podziałów grupy 10 osób na dwie równoliczne grupy, gdyż każde dwie takie grupy możemy otrzymać w dwóch odwrotnych kolejnościach; wybrana grupa pięciu osób może przecież innym razem stanowić grupę pozostałych pięciu osób. Zatem wszystkich możliwych podziałów grupy 10 osób na dwie równoliczne grupy jest:

$$\frac{1}{2} \cdot C_{10}^5 = \frac{1}{2} \cdot \binom{10}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10!}{5! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2 \cdot 7 \cdot 9 = 126.$$



Pytania i zadania

- Podaj określenie symbolu $\binom{n}{k}$.
- Oblicz:
 - $\binom{7}{5}$, $\binom{8}{0}$, $\binom{4}{4}$, $\binom{10}{9}$, $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{n-2}$, $\binom{n+1}{n}$, $\binom{n}{k+1}$, $\binom{n+1}{k}$;
 - $\binom{7}{4} + \binom{7}{5}$, $\binom{9}{7} + \binom{9}{8}$, $\binom{n-1}{n-3} + \binom{n-1}{n-2}$, $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2}$, $\binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n+1}{n}$.
- Udowodnij, że:
 - $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$, gdy $n, k \in \mathbb{N}$ i $1 \leq k \leq n$;
 - $\binom{n}{k} \binom{k}{l} = \binom{n}{l} \binom{n-l}{k-l}$, gdy $k, l, n \in \mathbb{N}$ i $0 \leq l \leq k \leq n$.
- Co nazywamy k -elementową kombinacją zbioru n -elementowego? Ile jest takich kombinacji?
- Wypisz wszystkie kombinacje zbioru:
 - $\{1, 2\}$; b) $\{1, 2, 3\}$; c) $\{1, 2, 3, 4\}$; d) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Ile jest wszystkich kombinacji zbioru n -elementowego?
- Na płaszczyźnie danych jest 5 punktów, z których żadne 3 nie są współliniowe. Ile można zbudować trójkątów, których wierzchołkami są 3 spośród danych 5 punktów?
- Ile sześciuosobowych delegacji można utworzyć z klasy liczącej 12 dziewcząt i 18 chłopców, jeśli w skład każdej delegacji ma wejść trzech chłopców i troje dziewcząt?
- Oblicz liczbę przekątnych n -kąta wypukłego ($n \geq 3$).
- Na ile sposobów można rozmieścić w czterech klatkach 18 królików, tak aby w pierwszej było ich 7, w drugiej 5, w trzeciej 4, a w czwartej 2?
- * Ile dzielników ma liczba $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$?
- W kasetce znajduje się 20 banknotów, w tym 8 nierozróżnialnych dwustuzłotowych i 12 nierozróżnialnych stużłotowych. Na ile sposobów możemy wyjąć z tej kasetki 1000 zł?

13. Z talii 52 kart wybieramy losowo 6 kart. Ile jest możliwych wyników losowania, w których wybierzemy 5 kart jednego koloru?
14. W skrzynce znajduje się 20 żarówek, w tym 3 wadliwe. Ile jest możliwości wyjęcia z tej skrzynki 4 żarówek, wśród których co najmniej jedna okaże się wadliwa?
- 15*. Na ile sposobów można rozmieścić dziewięciu studentów w trzech pokojach trzyosobowych, gdy:
- każdy może mieszkać z każdym;
 - pewni dwaj studenci nie chcą mieszkać razem?
- 16**. Stosując pojęcie kombinacji, udowodnij własności symbolu Newtona:
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; b) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$; c) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$.

3. Wariacje (rozmieszczenia) z powtórzeniami i bez powtórzeń

Wariacje z powtórzeniami

Tym razem zacznijmy od przykładów.

Przykład 1. Z cyfr 1, 2, 3, 4 chcemy utworzyć trzycyfrową liczbę \overline{abc} , przy tym cyfry nie muszą być różne. Ile takich liczb możemy utworzyć?

Rozwiązanie:

Z podanej treści wynika, że cyfrą setek, cyfrą dziesiątek i cyfrą jedności może być każda z cyfr 1, 2, 3, 4. Cyfrę a możemy więc wybrać na cztery sposoby, podobnie zresztą jak cyfrę b i c . Zatem wszystkich liczb trzycyfrowych o podanych cyfrach może powstać $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$.

Przykład 2. Rzucamy pięć razy sześcienną kostką do gry. Ile jest wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia?

Rozwiązanie:

Przy każdym rzucie tą kostką otrzymujemy jedną z liczb od 1 do 6. Wyniki pięciu rzutów mogą się oczywiście powtarzać. Wobec tego wszystkich możliwych wyników jest $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5$.

Trzycyfrową liczbę \overline{abc} o cyfrach odpowiednio: a – setek, b – dziesiątek i c – jedności (niekoniecznie różnych) ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ możemy utożsamiać z trójwyrazowym ciągiem (a, b, c) o wyrazach (niekoniecznie różnych) ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$. Jak obliczyliśmy, takich ciągów mamy 4^3 .

Podobnie wynik pięciokrotnego rzutu sześcienną kostką do gry możemy potraktować jako pięciowyrazowy ciąg $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$, z którego każdy wyraz przyjmuje dowolną z wartości: 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Obliczyliśmy, że takich ciągów jest 6^5 .

Przejdźmy zatem do rozważań ogólnych. Mając zbiór n -elementowy $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, tworzymy k -wyrazowe ciągi o wyrazach (niekoniecznie różnych) z tego zbioru. Obliczmy, ile takich ciągów powstanie.

Pierwszym wyrazem tworzonego ciągu może być dowolny element danego zbioru, więc możliwości wyboru wartości dla pierwszego wyrazu jest n (tyle, ile elementów ma dany zbiór). Drugi wyraz także może przyjąć każdą z wartości a_1, a_2, \dots, a_n , zatem pierwsze dwa wyrazy tego ciągu możemy utworzyć na $n \cdot n = n^2$ sposobów. Trzecim wyrazem ciągu również może być dowolny element danego zbioru. Wobec tego trzy pierwsze wyrazy tego ciągu powstaną na $n^2 \cdot n = n^3$ sposobów. Rozumując dalej w ten sposób, dojdziemy do ostatniego, k -tego wyrazu, który również może przyjąć każdą z wartości a_1, a_2, \dots, a_n . Wnioskujemy stąd, że wszystkich k -wyrazowych ciągów o wyrazach (niekoniecznie różnych) ze zbioru n -elementowego jest n^k .

! \circ Każdy k -wyrazowy ciąg o wyrazach (niekoniecznie różnych) ze zbioru n -elementowego (gdzie n i k są liczbami naturalnymi) nazywa się k -wyrazową wariacją z powtórzeniami zbioru n -elementowego.

Prawdziwe jest zatem twierdzenie:

Twierdzenie

Jeżeli n i k są dowolnymi dodatnimi liczbami naturalnymi, to wszystkich k -wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n -elementowego jest n^k .

Liczbę k -wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n -elementowego będziemy oznaczać symbolem W_n^k . Tak więc:

$$W_n^k = n^k.$$

Nazwa wariacja pochodzi od łacińskiego słowa *variatio*, czyli zmiana.

Przykład 3. Rzucamy dziesięć razy monetą. Ile jest wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia?

Rozwiązanie:

W każdym rzucie monetą wypada albo orzeł, albo reszka i w kolejnych rzutach mogą się one powtarzać. Każdy wynik tego doświadczenia odpowiada więc dziesięciowyrazowej wariacji z powtórzeniami zbioru dwuelementowego {orzeł, reszka}. Na przykład ciąg: (O, O, O, O, O, R, R, R, R, R) oznacza, że w pierwszych pięciu rzutach wypadł orzeł, a w pozostałych – reszka. Wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia jest więc $W_2^{10} = 2^{10} = 1024$.

Przykład 4. Na szczyt pewnej góry prowadzi ze schroniska 7 dróg, którymi można wchodzić i schodzić. Ile możemy odbyć różnych wycieczek: schronisko – szczyt – schronisko?

Rozwiązanie:

Ponumerujemy te drogi: d_1, d_2, \dots, d_7 . Wybierając na przykład drogę d_1 do wejścia na szczyt tej góry i do zejścia z niej, otrzymujemy parę (d_1, d_1) , odpowiadającą jednej z możliwości odbycia wycieczki ze schroniska na szczyt góry i z powrotem. Kolejna para, na przykład (d_2, d_7) , oznacza, że na szczyt tej góry weszliśmy drogą d_2 , a zeszliśmy drogą d_7 . Wszystkich możliwości odbycia wycieczki: schronisko – szczyt – schronisko jest więc tyle, ile wszystkich dwuwyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru siedmioelementowego, czyli $W_7^2 = 7^2 = 49$.

Wariacje bez powtórzeń

Tym razem będziemy wyznaczać liczbę wszystkich k -wyrazowych ciągów o różnych wyrazach ze zbioru n -elementowego $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Pierwszym wyrazem takiego ciągu może być dowolny element danego zbioru. Drugim wyrazem może już być każdy z pozostałych $n - 1$ elementów tego zbioru. Dwa pierwsze wyrazy rozważanego ciągu możemy więc utworzyć na $n(n - 1)$ sposobów. Mając już dwa wyrazy tego ciągu, możemy dobrać jako jego trzeci wyraz każdy spośród pozostałych $n - 2$ elementów danego zbioru. Trzy pierwsze wyrazy naszego ciągu możemy utworzyć na $n(n - 1)(n - 2)$ sposoby. Rozumując dalej w ten sposób, dojdziemy do ostatniego, k -tego wyrazu rozważanego ciągu, którym może być dowolny element spośród $n - (k - 1)$ pozostałych elementów w danym zbiorze. Zatem wszystkich k -wyrazowych ciągów o różnych wyrazach ze zbioru n -elementowego jest $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$.

Każdy k -wyrazowy ciąg o różnych wyrazach ze zbioru n -elementowego (gdzie k i n oznaczają dowolne liczby naturalne) nazywamy k -wyrazową **wariacją bez powtórzeń** zbioru n -elementowego. !

Prawdziwe jest więc następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Jeżeli n i k są dowolnymi dodatnimi liczbami naturalnymi i $k \leq n$, to wszystkich k -wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego jest:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1).$$

Liczbę tę możemy nadać krótszą i łatwiejszą do zapamiętania postać. Zauważmy bowiem, że:

$$n(n - 1)(n - 2) \dots (n - k + 1) = \frac{n(n - 1)(n - 2) \dots (n - (k - 1)) \cdot (n - k)!}{(n - k)!} = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

Liczbę k -wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego będziemy oznaczać symbolem V_n^k . Zatem:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

Gdy $k = n$, powyższy wzór przybiera postać $V_n^n = n!$ i wyraża liczbę permutacji zbioru n -elementowego. Każdy bowiem n -wyrazowy ciąg o różnych wyrazach ze zbioru n -elementowego to permutacja tego zbioru.

Przejdźmy do przykładów.

Przykład 1. Z cyfr 1, 2, 3, ..., 9 układamy trzycyfrową liczbę o różnych cyfrach. Ile takich liczb możemy ułożyć?

Rozwiązanie:

Każda trzycyfrowa liczba \overline{abc} o różnych cyfrach ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ odpowiada trójwyrazowemu ciągowi (a, b, c) o różnych wyrazach z podanego zbioru i na odwrót, każdy

taki ciąg wyznacza trzycyfrową liczbę o różnych cyfrach z danego zbioru. Wszystkich liczb trzy-cyfrowych, o których mowa, możemy więc ułożyć tyle, ile jest trójwyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru dziewięcioelementowego, czyli $V_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$.

Przykład 2. Windą dziesięciopiętrowego domu jedzie 7 osób. Na ile sposobów mogą one wysiąść z tej windy, jeśli każda z nich wysiada na innym piętrze?

Rozwiązanie:

Pierwsza z jadących windą osób może wysiąść na dowolnym spośród 10 pięter, druga na każdym spośród 9 pięter, trzecia na którymkolwiek z pozostałych ośmiu pięter, czwarta ma do wyboru już tylko siedem pięter, piąta – sześć, szósta – pięć, a ostatnia – cztery. Zatem jadące w tej windzie osoby mogą z niej wysiąść na $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 604800$ sposobów.

Na koniec zobaczmy, jak ze wzoru na liczbę k -wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego wynika wzór na liczbę k -elementowych kombinacji tego zbioru.

Każdą k -elementową kombinację zbioru n -elementowego, czyli k -elementowy podzbiór tego zbioru, można uporządkować na $k!$ sposobów i każde to uporządkowanie jest oczywiście k -wyrazową wariacją bez powtórzeń danego zbioru n -elementowego. Stąd wynika, że wszystkich takich wariacji jest $k! \cdot C_n^k$. Wiemy przy tym, że jest ich $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Otrzymujemy zatem równość $k! \cdot C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, a stąd szukany wzór: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$.

Pytania i zadania

- Co to jest k -wyrazowa wariacja:
 - a) z powtórzeniami zbioru n -elementowego;
 - b) bez powtórzeń zbioru n -elementowego?
- Ile jest wszystkich k -wyrazowych wariacji:
 - a) z powtórzeniami zbioru n -elementowego;
 - b) bez powtórzeń zbioru n -elementowego?
- Ile jest wszystkich rozmieszczeń w czterech szufladach dziesięciu kul ponumerowanych od 1 do 10?
- Z talii 52 kart losujemy jedną, zwracamy ją, karty tasujemy, losujemy drugą, zwracamy ją, karty znowu tasujemy i losujemy trzecią kartę. Ile jest możliwych wyników losowania?
- Ile różnych liczb czterocyfrowych można ułożyć z cyfr 0, 1, 2, 3, 4 tak, aby żadna cyfra się nie powtórzyła?
- Czterej koledzy udali się do cukierni. Spośród ośmiu rodzajów ciastek każdy z nich wybrał jeden. Ile różnych zestawów ciastek koledzy mogli wybrać, jeśli:
 - a) każdy z nich zdecydował się na inny rodzaj ciastka;
 - b) dla żadnego z nich nie miało znaczenia, które ciastko wybierze?
- Ile jest wszystkich co najwyżej n -wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n -elementowego?

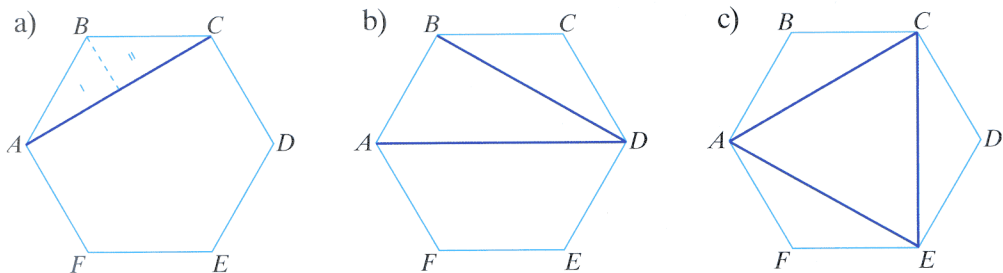
4. Zadania różne z kombinatoryki

Podrozdział ten poświęcimy zadaniom z kombinatoryki, w których będziemy korzystać z poznanych wcześniej wzorów.

Przykład 1. Oblicz sumę pól wszystkich trójkątów, jakie można utworzyć w taki sposób, by ich wierzchołkami były wybrane wierzchołki sześciokąta foremnego o boku długości 1.

Rozwiązanie:

Wszystkich trójkątów, o których mowa w zadaniu, jest tyle, ile możliwych wyborów trzech punktów spośród sześciu, czyli $C_6^3 = \binom{6}{3} = 20$. Otrzymujemy przy tym trzy rodzaje trójkątów, zależnie od wzajemnego położenia wierzchołków (ryc. 6.2).



Ryc. 6.2.

- a) Trójkątów, których wierzchołkami są kolejne wierzchołki sześciokąta, jest 6. Każdy z nich składa się z dwóch połówek trójkątów równobocznych o boku 1, każdy z nich ma więc pole $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Suma pól trójkątów tego rodzaju wynosi $6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
- b) Następnym rodzajem to trójkąty, których dwa wierzchołki są kolejnymi wierzchołkami sześciokąta, a trzeci już nie. Są to trójkąty prostokątne o przeciwprostokątnej równej 2 i jednej z przyprostokątnych o długości 1. Każdy z nich ma zatem pole $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Trójkątów takich jest 12, więc suma ich pól wynosi $12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.
- c) Trójkąty, które za wierzchołki mają co drugie wierzchołki sześciokąta, są 2. Są to trójkąty równoboczne o boku długości $\sqrt{3}$, a więc pole jednego trójkąta równe jest $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. Suma ich pól wynosi zatem $2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
- Poszukiwana suma to: $\frac{3\sqrt{3}}{2} + 6\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$.

Przykład 2. Dane są liczby naturalne n i k takie, że $n \geq 4$ i $1 < k < n - 1$. Na ile sposobów możemy wybrać ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ takie cztery liczby, aby wśród nich jedną była k , a wśród pozostałych trzech dokładnie jedna – mniejsza od k ?

Rozwiązanie:

Wśród liczb $1, 2, 3, \dots, n$ liczb mniejszych od k jest $k - 1$; są nimi liczby $1, 2, 3, \dots, k - 1$ i spośród nich ma być wybrana jedna. Kolejną z wybranych czterech liczb ma być k , więc pozostałe dwie wybieramy spośród $n - k$ liczb większych od k , czyli spośród liczb: $k + 1, k + 2, \dots, n - 1, n$. Zatem cztery liczby, spełniające podane warunki, możemy wybrać na $C_{k-1}^1 \cdot C_1^1 \cdot C_{n-k}^2 = \binom{k-1}{1} \cdot \binom{n-k}{2}$ sposobów.

Przykład 3. Student zna odpowiedź na 15 spośród 25 pytań obowiązujących na egzaminie. Losuje kartkę z trzema pytaniami. Gdy potrafi odpowiedzieć na co najmniej dwa pytania, zda je egzamin. Ile jest kartek z pytaniami, które gwarantują studentowi zdanie egzaminu?

Rozwiązanie:

Są to oczywiście kartki zawierające albo 3, albo 2 spośród 15 pytań, na które student zna odpowiedź. Kartek pierwszego rodzaju jest tyle, ile możliwych wyborów 3 pytań spośród 15, czyli $C_{15}^3 = \binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \cdot 7 \cdot 13 = 455$; drugiego zaś rodzaju – tyle, ile możliwych wyborów 2 pytań spośród 15 i 1 pytania z pozostałych 10, czyli $C_{15}^2 \cdot C_{10}^1 = \binom{15}{2} \cdot \binom{10}{1} = \frac{15 \cdot 14}{2} \cdot 10 = 15 \cdot 7 \cdot 10 = 1050$. Zatem wszystkich kartek, zawierających co najmniej dwa pytania, na które student zna odpowiedź, jest $455 + 1050 = 1505$.

Przykład 4*. Na ile sposobów można podzielić zbiór dwunastoelementowy na sześć rozłącznych podzbiorów dwuelementowych?

Rozwiązanie:

Pierwszy dwuelementowy podzbiór można utworzyć na $C_{12}^2 = \binom{12}{2}$ sposobów, drugi, rozłączny z pierwszym, już na $C_{10}^2 = \binom{10}{2}$ sposobów, trzeci – na $C_8^2 = \binom{8}{2}$ sposobów, czwarty – na $C_6^2 = \binom{6}{2}$ sposobów, piąty – na $C_4^2 = \binom{4}{2}$ sposobów i wreszcie ostatni – już tylko na $1 = \binom{2}{2} = C_2^2$ sposób. Razem jest więc $\binom{12}{2} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}$ sposobów wybierania sześciu rozłącznych podzbiorów dwuelementowych danego zbioru. Ten sam podział tego zbioru na rozłączne podzbiory dwuelementowe jest liczony w tej liczbie 6! razy, gdyż nie zależy on od tego, w jakiej kolejności występują w nim podzbiory dwuelementowe, których jest sześć. Zatem poszukiwana liczba żądanych podziałów wynosi:

$$\frac{1}{6!} \cdot \binom{12}{2} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = \frac{12!}{2^6 \cdot 6!} = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 = 10395.$$

Przykład 5*. Dana jest szachownica o n wierszach i n kolumnach. Na ile sposobów można wybrać k pól ($k \leq n$) tej szachownicy, tak aby żadne dwa z wybranych pól nie leżały ani w tym samym wierszu, ani w tej samej kolumnie?

Rozwiązanie:

Pierwsze pole możemy wybrać na n^2 sposobów (może nim być dowolne pole tej szachownicy). Drugie pole wybieramy na $(n - 1)^2$ sposobów (pomijamy pola z rzędów w pionie

i w poziomie, na których leżało pierwsze pole), trzecie pole możemy wybrać już tylko na $(n-2)^2$ sposobów itd., aż dojdziemy do k -tego pola, które wybieramy na $(n-k+1)^2$ sposobów. Razem jest więc $n^2(n-1)^2(n-2)^2 \dots (n-k+1)^2$ sposobów wyboru żądanych k pól, przy czym w liczbie tej ten sam wybór k pól liczony jest $k!$ razy (nie zależy on przecież od kolejności, w jakiej te pola wybieraliśmy). Zatem wszystkich żądanych wyborów k pól tej szachownicy jest:

$$\frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2 \dots (n-k+1)^2}{k!} = \frac{(n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1))^2}{k!} = \left(\frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!} \right)^2 \cdot k! = \binom{n}{k}^2 \cdot k!.$$

Przykład 6*. Koło podzielono na 5 równych sektorów. Każdy z nich chcemy pomalować na jeden z 7 dostępnych kolorów. Ile możemy otrzymać w ten sposób różnych wariantów kolorystycznych tego koła, jeśli przyjmiemy, że dwa warianty, z których jeden staje się drugim po obrocie tego koła o kąt $k \cdot 72^\circ$, gdzie $k = 0, 1, 2, 3, 4$, uznajemy za identyczne?

Rozwiązanie:

Każdy sektor malujemy na jeden z 7 kolorów, więc wszystkich wariantów kolorystycznych tego koła jest 7^5 (tyle, ile jest wszystkich pięciowyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru siedmioelementowego). Wśród tych wariantów jest 7 jednobarwnych i $7^5 - 7$ niejednobarwnych, przy czym każdy wariant niejednobarwny tego koła jest liczony w liczbie $7^5 - 7$ pięciokrotnie (istnieje pięć obrotów tego koła o kąty: $0 \cdot 72^\circ, 1 \cdot 72^\circ, 2 \cdot 72^\circ, 3 \cdot 72^\circ, 4 \cdot 72^\circ$, po których każdy wariant niejednobarwny staje się tym samym). Wobec tego wszystkich wariantów niejednobarwnych tego koła jest $\frac{7^5 - 7}{5} = \frac{7 \cdot (7^4 - 1)}{5} = \frac{7 \cdot 2400}{5} = 7 \cdot 480 = 3360$, a wszystkich wariantów 3367.

Pytania i zadania



1. Oblicz sumę pól wszystkich trójkątów, których wierzchołkami są wybrane wierzchołki sześcianu o krawędzi długości 1.
2. Oblicz sumę długości odcinków, którymi można połączyć każde dwa wierzchołki sześciokąta foremnego o boku długości 1.
3. Oblicz sumę długości odcinków, którymi można połączyć każde dwa wierzchołki sześcianu o krawędzi długości 1.
4. Rzucamy n różnokolorowych kostek sześciennych do gry. W ilu wynikach tego doświadczenia otrzymamy sumę oczek równą $6n - 1$?
5. Z urny zawierającej trzy kule białe i siedem kul czarnych wyjmujemy cztery kule. Na ile sposobów możemy w ten sposób wyjąć więcej kul czarnych niż białych?
6. Ile jest trzycyfrowych liczb mniejszych od 555 o cyfrach ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$?
7. Na ile sposobów można wybrać dwie liczby spośród liczb $1, 2, 3, \dots, n$ tak, aby jedna z nich była mniejsza, a druga – większa od danej liczby naturalnej k takiej, że $1 < k < n$?

8. Z talii 52 kart wyciągamy 10 różnych kart. Ile razy możemy wylosować w ten sposób 8 kart tego samego koloru?
- 9*. Rzucamy n razy monetą. W ilu wynikach tego doświadczenia orzeł wypadnie nieparzystą liczbę razy?
- 10*. Ile istnieje wyborów trzech różnych liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 3n\}$, których suma jest podzielna przez 3?
- 11*. Wyznacz liczbę uporządkowanych par rozłącznych podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.
- 12**. Dany jest zbiór n -elementowy A . W zbiorze tym wyróżniono podzbiór m -elementowy B . Ile jest podzbiorów zbioru A niezawierających się w B i nierozłącznych z nim?

5. Zdarzenia elementarne

Zdarzenie elementarne jest w rachunku prawdopodobieństwa pojęciem pierwotnym, czyli takim, którego się nie definiuje (podobnie jak pojęcia punktu w geometrii czy zbioru w teorii zbiorów). Zdarzenia elementarne będziemy oznaczać małą literą grecką ω , dopisując u dołu wskaźniki, na przykład $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ itd.

Prześledzimy teraz kilka przykładów doświadczeń, aby zaobserwować, co w konkretnej sytuacji należy rozumieć pod pojęciem zdarzenia elementarnego. W każdym z tych przykładów sporządzimy zbiór wszystkich możliwych wyników rozważanego doświadczenia takich, że każdy z nich wyklucza wszystkie pozostałe w tym zbiorze. Te właśnie wyniki będziemy utożsamiać ze zdarzeniami elementarnymi.

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych oznaczamy dużą literą grecką Ω i zakładamy, że jest to zbiór skończony. Liczbę jego elementów zapisujemy jako $|\Omega|$.

Przykład 1. Rzucamy raz monetą. Zdarzeniami elementarnymi nazwiemy w tym doświadczeniu dwa oczywiste wyniki: „wypadł orzeł”, „wypadła reszka”. Zbiór Ω jest więc dwuelementowy: $\Omega = \{\omega_O, \omega_R\}$, gdzie ω_O oznacza zdarzenie: „wypadł orzeł”, zaś ω_R – zdarzenie: „wypadła reszka”. Zatem $|\Omega| = 2$.

Przykład 2. Rzucamy raz dwiema monetami. Za zdarzenia elementarne przyjmujemy w tym doświadczeniu uporządkowane pary wyników: orzeł lub reszka na pierwszej monecie; orzeł lub reszka na drugiej monecie, czyli pary: (O, O); (O, R); (R, O); (R, R). Są to cztery zdarzenia elementarne, zatem: $\Omega = \{(O, O), (O, R), (R, O), (R, R)\}$, $|\Omega| = 4$.

Przykład 3. Rzucamy raz kostką sześcienną do gry. Wynikami tego doświadczenia są zdarzenia postaci: „wypadło k oczek”, gdzie $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Oznaczając symbolem ω_k zdarzenie: „wypadło k oczek”, które uznajemy za zdarzenie elementarne, otrzymujemy zbiór $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, zatem $|\Omega| = 6$.

Przykład 4. Rzucamy raz dwiema kostkami. W celu ułatwienia zapisu ponumerujemy je. Za zdarzenia elementarne będziemy wtedy mogli przyjąć zdarzenia postaci: „na pierwszej kostce wypadło k oczek, a na drugiej l oczek”, gdzie $k, l \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, czyli uporządkowane pary (k, l) . Tak więc $\omega = (k, l)$ i oczywiście $\Omega = \{\omega = (k, l); k, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Zatem $|\Omega| = W_6^2 = 6^2 = 36$.

Przykład 5. Rzucamy raz kostką i monetą. Zdarzeniami elementarnymi będą w tym doświadczeniu uporządkowane pary: wypadła ścianka z k oczkami, wypadł orzeł lub wypadła reszka, a więc pary: (k, l) , gdzie $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $l \in \{O, R\}$. Zatem $\omega = (k, l)$, zaś $\Omega = \{\omega = (k, l); k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, l \in \{O, R\}\}$. Oczywiście $|\Omega| = 12$.

Gdyby w doświadczeniu polegającym na rzucie dwiema kostkami do gry interesowały nas suma bądź iloczyn liczb oczek wyrzuconych na obu kostkach, to zbiór Ω byłby odpowiednio zbiorem $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ bądź zbiorem $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$. Zbiór zdarzeń elementarnych można zatem określić w danym doświadczeniu na różne sposoby. Zależać to będzie od aspektu, w jakim badamy zjawisko. Zazwyczaj za zdarzenia elementarne będziemy w rozważanych doświadczeniach przyjmować takie ich wyniki, które są w jednakowym stopniu możliwe (albo inaczej mówiąc, jednakowo prawdopodobne). Jak się później przekonamy, będzie to najbardziej dogodnie dla obliczenia prawdopodobieństwa interesujących nas zdarzeń. (Oczywiście nie zawsze może się to okazać możliwe, np. wtedy, gdy będziemy rzucać niesymetryczną monetą lub kostką, czyli z jednej strony obciążoną. Jak sobie z tym radzić, przekonamy się nieco później). Teraz wróćmy do kolejnych przykładów doświadczeń i opisu zbioru zdarzeń elementarnych.

Przykład 6. Trzej strzelcy oddają strzały do jednego celu. Strzał celny kodujemy cyfrą 1, zaś strzał niecelny, zwany pudłem – cyfrą 0. Za zdarzenie elementarne przyjmujemy w tym doświadczeniu trójwyrazowy ciąg wyników strzałów oddanych przez strzelców. Na przykład ciąg $(1, 0, 1)$ czytamy: drugi strzelec spudłował, dwaj pozostali trafili. Tak więc $\omega = (k, l, m)$, gdzie $k, l, m \in \{0, 1\}$, zaś $\Omega = \{\omega = (k, l, m); k, l, m \in \{0, 1\}\}$. Zatem $|\Omega| = W_2^3 = 2^3 = 8$.

Przykład 7. W urnie znajduje się dziewięć kul ponumerowanych liczbami od 1 do 9. Wyjmujemy kolejno, bez wrzucania z powrotem do urny, trzy kule i zapisujemy ich numery w kolejności losowania. Zdarzeniami elementarnymi mogą być w tym doświadczeniu na przykład ciągi trójwyrazowe numerów wylosowanych kul, oczywiście o różnych wyrazach. Tak więc $\omega = (k, l, m)$, gdzie k, l, m są różnymi liczbami ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Zatem Ω jest zbiorem wszystkich takich ciągów, a $|\Omega| = V_9^6 = \frac{9!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$.

Przykład 8. Wypełniamy jedno okienko kuponu Dużego Lotka, skreślając 6 spośród występujących tam 49 liczb od 1 do 49. Za zdarzenie elementarne przyjmujemy w opisywanej sytuacji sześcielementowy podzbiór zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 49\}$. Tak więc $\omega = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6\}$, gdzie $l_i \in \{1, 2, \dots, 49\}$, zaś $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Wobec tego:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{\omega = \{l_1, l_2, \dots, l_6\}; l_i \in \{1, 2, \dots, 49\}, i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}; \text{ zaś } |\Omega| = C_{49}^6 = \binom{49}{6} = \\ &= \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 3 \cdot 44 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 49 = 13983816. \end{aligned}$$

Przykład 9. W konkursie skoków narciarskich każdy zawodnik oddaje dwa skoki. Wynik każdego skoku jest zdarzeniem losowym, ponieważ zależy od wielu czynników czasem trudnych do przewidzenia, na przykład prędkości wiatru, stanu ośnieżenia skoczni,

warunków psychicznych i fizycznych zawodnika, sprzętu itp. Długość skoku jest mierzona z dokładnością do 0,5 m. Wiadomo też, że na danej skoczni nie da się skoczyć dalej niż 130 m. Za zdarzenie elementarne przyjmujemy w tym doświadczeniu na przykład parę uporządkowaną (a, b) , gdzie a oznacza długość pierwszego skoku, zaś b jest długością drugiego, przy czym a i b mogą przybierać wartości ze zbioru $S = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, \dots, 129, 129\frac{1}{2}, 130\right\}$. Oczywiście, dla uproszczenia rozważamy wszystkie teoretycznie możliwe długości skoków. Tak więc $\omega = (a, b)$, gdzie $a, b \in S$, a $\Omega = \{\omega = (a, b) : a, b \in S\}$. Zatem $|\Omega| = W_{261}^2 = 261^2 = 68121$.

Pytania i zadania

1. Jak należy rozumieć pojęcie zdarzenia elementarnego?
2. Rzucamy trzy razy monetą. Opisz zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych. Oblicz, ile ich jest.
3. Rzucamy raz:
 - a) dwiema nierozróżnialnymi monetami,
 - b) dwiema nierozróżnialnymi kostkami do gry.
 Opisz w każdym z tych przykładów zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych i wyznacz ich liczbę.
4. W turnieju szachowym rozgrywanym systemem „każdy z każdym” biorą udział cztery osoby: A, B, C, D . Przyjmujemy, że wynik każdej partii szachów (wygrana lub przegrana – rezultaty remisowe pomijamy) jest zdarzeniem losowym. Opisz zbiór zdarzeń elementarnych i wyznacz ich liczbę.
5. Klasie liczącej 30 uczniów przydzielono trzy miejsca w wycieczce zagranicznej. Uczniów wybrano losowo. Opisz zbiór zdarzeń elementarnych i wyznacz ich liczbę.
6. Do windy na parterze dziesięciopiętrowego bloku wsiada 8 osób, by wysiąść z niej na którymś z pięter. Opisz zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych i wyznacz ich liczbę.

6. Zdarzenia i działania na zdarzeniach

Jak wiadomo, Ω oznacza zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych w danym doświadczeniu losowym, utożsamianych z wynikami tego doświadczenia. Oczywiście, rozpatrujemy tylko takie doświadczenia, w których zbiór Ω jest skończony.

Każdy podzbiór zbioru Ω nazywamy **zdarzeniem** w tym doświadczeniu. Zbiory jednoelementowe składające się z pojedynczych zdarzeń elementarnych są także zdarzeniami.

Zdarzenia będziemy oznaczać zazwyczaj dużymi literami alfabetu łacińskiego: A, B, C, \dots itd. albo jedną taką literą, do której można u dołu dopisywać wskaźniki, na przykład A_1, A_2, A_3, \dots itd. Oto kilka przykładów:

1. W rzucie kostką do gry zdarzeniami są na przykład zbiory: $\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, które czytamy odpowiednio: „wypadła nieparzysta liczba oczek”, „wypadła parzysta liczba oczek”, „wypadły co najwyżej cztery oczka”.
2. W dwukrotnym rzucie monetą zdarzeniami są na przykład zdarzenia:
 - „za każdym razem wypadło to samo”,
 - „za każdym razem wypadło co innego”,
 - „co najmniej raz wypadł orzeł”,
 - „co najmniej raz wypadła reszka”,
 które zapisujemy odpowiednio jako zbiory: $\{(O, O), (R, R)\}$, $\{(O, R), (R, O)\}$, $\{(O, O), (O, R), (R, O)\}$, $\{(R, R), (R, O), (O, R)\}$.
3. Podczas wyjmowania czterech kul z urny zawierającej trzy kule białe i trzy kule czarne, mogą zajść zdarzenia: „wyjeliśmy po dwie kule tego samego koloru”, „wyjeliśmy jedną kulę jednego koloru i trzy pozostałe drugiego”. Numerując te kule b_1, b_2, b_3 i c_1, c_2, c_3 , możemy wymienione zdarzenia zapisać odpowiednio jako zbiory:

$$\begin{aligned} & \{ \{b_1, b_2, c_1, c_2\}, \{b_1, b_2, c_1, c_3\}, \{b_1, b_2, c_2, c_3\}, \{b_1, b_3, c_1, c_2\}, \{b_1, b_3, c_1, c_3\}, \\ & \{b_1, b_3, c_2, c_3\}, \{b_2, b_3, c_1, c_2\}, \{b_2, b_3, c_1, c_3\}, \{b_2, b_3, c_2, c_3\} \}, \\ & \{ \{b_1, c_1, c_2, c_3\}, \{b_2, c_1, c_2, c_3\}, \{b_3, c_1, c_2, c_3\}, \{b_1, b_2, b_3, c_1\}, \{b_1, b_2, b_3, c_2\}, \\ & \{b_1, b_2, b_3, c_3\} \}. \end{aligned}$$

Skoro zdarzenia są zbiorami, możemy na nich wykonywać wszystkie działania związane z rachunkiem zbiorów. Omówimy je teraz, wprowadzając terminologię stosowaną w rachunku prawdopodobieństwa.

Zapis $\omega \in A$ oznaczający, że zdarzenie elementarne ω należy do zdarzenia (zbioru) A , będziemy czytać: **zdarzenie elementarne ω sprzyja zdarzeniu A** . Zatem każde zdarzenie jest zbiorem tych zdarzeń elementarnych, które mu sprzyjają.

Wśród wszystkich zdarzeń w zbiorze Ω warto wyróżnić dwa: podzbiór \emptyset zwany **zdarzeniem niemożliwym**, któremu nie sprzyja żadne zdarzenie elementarne ω (co zapiszemy $\omega \notin \emptyset$), i cały zbiór Ω zwany **zdarzeniem pewnym**, któremu sprzyja każde zdarzenie elementarne ω .

Przy jednokrotnym rzucie kostką do gry zdarzeniem niemożliwym jest: „wypadła liczba oczek podzielna przez 7”, a zdarzeniem pewnym: „wypadła liczba oczek nie większa od 6”.

W losowaniu czterech kul z urny zawierającej trzy kule białe i trzy czarne zdarzeniem niemożliwym jest: „wylosowano kule tylko jednego koloru”, a zdarzeniem pewnym: „wylosowano co najmniej jedną kulę białą”.

Powiemy, że dwa zdarzenia A i B są **identyczne**, co zapisujemy $A = B$, gdy sprzyjają im te same zdarzenia elementarne.

W doświadczeniu polegającym na dwukrotnym rzucie kostką do gry zdarzeniami identycznymi są zdarzenia:

A : nie wyrzucono parzystej liczby oczek;

B : iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest liczbą nieparzystą.

Mówimy, że **zdarzenie A pociąga za sobą zdarzenie B** i zapisujemy to: $A \subset B$, gdy każde zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu A sprzyja także zdarzeniu B . Musi zatem zachodzić warunek: jeśli zaszło zdarzenie A , to zajdzie zdarzenie B .

Na przykład w jednokrotnym rzucie dwiema kostkami do gry zdarzenie: „na obu kostkach wypadła ta sama liczba oczek” pociąga za sobą zdarzenie: „suma liczb oczek na obu kostkach jest liczbą parzystą”.

Koniunkcją lub iloczynem zdarzeń A i B nazywamy takie zdarzenie C , które zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi zdarzenie A i zdarzenie B . Zdarzenie elementarne ω sprzyja zdarzeniu C wtedy i tylko wtedy, gdy sprzyja zdarzeniu A i zdarzeniu B . Stąd wynika, że $C = A \cap B$. Zatem $\omega \in A \cap B \Leftrightarrow \omega \in A \wedge \omega \in B$.

Przykład 1. Rzucamy dwa razy monetą. Koniunkcją zdarzeń: A – „co najmniej raz wypadł orzeł” i B – „co najmniej raz wypadła reszka” jest zdarzenie: „za każdym razem wypadło co innego”.

Istotnie, ponieważ $A = \{(O, R), (R, O), (O, O)\}$, $B = \{(R, O), (O, R), (R, R)\}$, więc:

$$A \cap B = \{(O, R), (R, O)\}.$$

Alternatywą lub sumą zdarzeń A i B nazywamy takie zdarzenie C , które zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi zdarzenie A lub zdarzenie B . Zdarzenie elementarne ω sprzyja zdarzeniu C , gdy sprzyja co najmniej jednemu ze zdarzeń A i B . Zatem $C = A \cup B$. Tak więc $\omega \in A \cup B \Leftrightarrow \omega \in A \vee \omega \in B$.

Przykład 2. Alternatywą zdarzeń A i B z przykładu 1. jest zdarzenie pewne, czyli zbiór Ω .

Przykład 3. Rzucamy kostką do gry. Alternatywą zdarzeń: A – „wypadła nieparzysta liczba oczek” i B – „wypadła liczba oczek nie większa niż 4” jest zdarzenie: „wypadła liczba oczek nie większa niż 5”.

Rzeczywiście, ponieważ $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ i $B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, więc:

$$A \cup B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}.$$

Różnicą zdarzeń A i B nazywamy takie zdarzenie C , które zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi zdarzenie A i nie zachodzi zdarzenie B . Zdarzenie elementarne ω sprzyja więc zdarzeniu C , gdy sprzyja zdarzeniu A i nie sprzyja zdarzeniu B . Wynika stąd, że $C = A \setminus B$. Zatem $\omega \in A \setminus B \Leftrightarrow \omega \in A \wedge \omega \notin B$.

Przykład 4. Różnicą zdarzeń A i B z przykładu 1. jest zdarzenie: „za każdym razem wypadł orzeł”, a więc zbiór $\{(O, O)\}$.

Przykład 5. Różnicą zdarzeń A i B z przykładu 3. jest zdarzenie: „wypadła piątka”.

Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A nazywamy takie zdarzenie A' , które zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi zdarzenie A . Wobec tego $\omega \in A' \Leftrightarrow \omega \notin A$ (zdarzenie elementarne ω sprzyja zdarzeniu A' , gdy nie sprzyja zdarzeniu A). Stąd $A' = \Omega \setminus A$.



Przykład 6. W rzucie kostką do gry zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A – „wypadła parzysta liczba oczek” jest zdarzenie A' – „wypadła nieparzysta liczba oczek”.

Faktycznie, jeśli $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, zaś: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, to:

$$\Omega \setminus A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}.$$

Nietrudno spostrzec, że koniunkcja dowolnego zdarzenia i zdarzenia do niego przeciwnego jest zdarzeniem niemożliwym. Dla dowolnego zdarzenia A zachodzi zatem równość: $A \cap A' = \emptyset$.

Parę zdarzeń A i B , których koniunkcja jest zdarzeniem niemożliwym, nazywamy **parą zdarzeń wyłączających się**. Tak więc zdarzenia A i B wyłączają się, gdy $A \cap B = \emptyset$.

Przykład 7. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Parą zdarzeń wyłączających się jest w tym doświadczeniu na przykład para zdarzeń:

A – co najmniej raz wypadła parzysta liczba oczek;

B – iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest liczbą nieparzystą.

Pytania i zadania



1. Co to jest zdarzenie? Co to jest zdarzenie pewne, a co to jest zdarzenie niemożliwe?
2. Podaj określenia:
 - a) koniunkcji zdarzeń;
 - b) alternatywy zdarzeń;
 - c) różnicy zdarzeń;
 - d) zdarzenia przeciwnego do danego zdarzenia.
3. Kiedy zdarzenie A pociąga za sobą zdarzenie B , a kiedy zdarzenia A i B są równe?
4. Kiedy zdarzenia A i B wyłączają się?
- 5*. Ile jest zdarzeń, którym sprzyja co najmniej jedno z n zdarzeń elementarnych?
6. Dane są zdarzenia A i B . Stosując symbolikę działań na zdarzeniach, zapisz zdarzenia:
 - a) zajdzie zdarzenie A i nie zajdzie zdarzenie B ;
 - b) nie zajdzie któreś ze zdarzeń A i B ;
 - c) zajdzie tylko jedno ze zdarzeń A i B ;
 - d) nie zajdzie żadne ze zdarzeń A i B .
7. Dane są zdarzenia A , B , C . Stosując symbolikę działań na zdarzeniach, zapisz zdarzenia:
 - a) zajdą zdarzenia A i B i nie zajdzie zdarzenie C ;
 - b) zajdzie co najmniej jedno ze zdarzeń A , B i C ;
 - c) nie zajdzie co najmniej jedno ze zdarzeń A , B i C ;
 - d) zajdzie tylko jedno spośród zdarzeń A , B i C .

8. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniom:
- suma liczb wyrzuconych oczek jest liczbą pierwszą;
 - co najmniej jedna z liczb wyrzuconych oczek jest liczbą pierwszą;
 - ani razu nie wypadła liczba oczek większa od 4;
 - co najmniej raz wypadła piątka.
9. Rzucamy trzy razy monetą. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniom:
- tylko dwa razy wypadło to samo;
 - za pierwszym i za trzecim razem wypadło co innego;
 - co najmniej raz wypadł orzeł;
 - ani razu nie wypadła reszka.
10. Czterej gracze: A, B, C i D usiedli do gry w karty. Każdy z nich ma w ręku po 13 kart. Rozpatrujemy następujące zdarzenia:
- A_k – gracz A otrzymał co najmniej k asów;
 B_k – gracz B otrzymał co najmniej k asów;
 C_k – gracz C otrzymał co najmniej k asów;
 D_k – gracz D otrzymał co najmniej k asów; ($k = 1, 2, 3, 4$).
- Ile asów otrzymał gracz A , jeśli zaszło zdarzenie:
- A_1 ;
 - $B_3 \cap C_1$;
 - $B_1 \cap C_1 \cap D_1$;
 - $B_2 \cap D_2$;
 - $A_3 \setminus A_4$;
 - $A_1 \cap B_1 \cap C_1 \cap D_1$;
 - $A_3 \cap B_1$?
11. Z urny zawierającej kule czarne i białe wylosowano trzy kule. Rozpatrujemy zdarzenia:
- A – wylosowano trzy kule białe;
 B – wylosowano co najmniej jedną kulę białą;
 C – wylosowano co najwyżej jedną kulę białą.
- Co oznaczają zdarzenia:
- A', B', C' ;
 - $A \cup B$;
 - $B \cup C$;
 - $A \cap B$;
 - $B \cap C$?
- 12**. Niech A, B, C będą zdarzeniami w zbiorze Ω . Opisz słowami zdarzenia:
- $[(A \cup B) \cap (A \cup B')] \cup [(A' \cup B) \cap (A' \cup B')]$;
 - $[(A \cup B) \cap (A' \cup B')] \cup [(A \cup B') \cap (A' \cup B)]$;
 - $(A \cup B) \cap (A \cup B') \cap (A' \cup B) \cap (A' \cup B')$.

7. Pojęcie prawdopodobieństwa i jego własności

Przeprowadzając pojedyncze doświadczenie losowe, trudno przewidzieć, jaki będzie jego wynik. Pewne zdarzenia zachodzą w nim częściej, inne – rzadziej. Rzucając dowolnie wiele razy monetą symetryczną (czyli nieobciążoną z żadnej strony), zauważymy, że częstość wypadania orła i częstość wypadania reszki jest w obu wypadkach bliska $\frac{1}{2}$. Mówimy, że zdarzenia te są jednakowo prawdopodobne.

Z kolei, przy wielokrotnym rzucaniu kostką do gry, parzysta liczba oczek wypadnie częściej niż piątka lub szóstka, tak samo zaś często, jak nieparzysta liczba oczek.

Można zatem każdemu zdarzeniu A przyporządkować pewną liczbę $P(A)$, określającą szansę zajścia tego zdarzenia w pojedynczym doświadczeniu. Liczbę tę nazwiemy prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia A w tym doświadczeniu. Przyporządkowanie zdarzeniu A liczby $P(A)$ nie może być zupełnie dowolne. Liczba $P(A)$ powinna być tak określona, aby w dostatecznie długim ciągu powtórzeń tego samego doświadczenia losowego, przeprowadzanego w tych samych warunkach, częstość pojawiania się zdarzenia A zbliżała się nieograniczenie do tej liczby.

Przyjrzyjmy się własnościom częstości zdarzenia, gdyż definicja prawdopodobieństwa powinna być z nimi zgodna. Rozważmy zatem doświadczenie, w którym zachodzą pewne dwa wyłączające się zdarzenia A i B , na przykład: rzucamy kostką do gry, a zdarzeniami, które nas interesują, są: A – „wypadła parzysta liczba oczek”; B – „wypadła nieparzysta liczba oczek”. Załóżmy, że w N powtórzeniach tego doświadczenia zdarzenie A zaszło n_A razy, zaś zdarzenie B zaszło n_B razy. Wówczas częstość, z jaką zachodzi zdarzenie A w rozważanym ciągu powtórzeń danego doświadczenia, wynosi $\frac{n_A}{N}$. Ponieważ $n_A \geq 0$, więc:

$$(1) \frac{n_A}{N} \geq 0.$$

Skoro zdarzenia A i B wyłączają się, to zdarzenie $A \cup B$ pojawia się w naszym ciągu powtórzeń $n_A + n_B$ razy. Zatem częstość, z jaką zachodzi zdarzenie $A \cup B$, wynosi $\frac{n_A + n_B}{N}$. Ale:

(2) $\frac{n_A + n_B}{N} = \frac{n_A}{N} + \frac{n_B}{N}$; stąd wynika, że częstość sumy pary zdarzeń wyłączających się jest równa sumie ich częstości.

Zdarzeniem pewnym w naszym doświadczeniu jest oczywiście zbiór Ω i zachodzi ono w każdym z N powtórzeń tego doświadczenia; stąd $n_\Omega = N$. Tak więc:

$$(3) \frac{n_\Omega}{N} = 1, \text{ co oznacza, że częstość zdarzenia pewnego jest równa } 1.$$

Możemy teraz sformułować **ogólną definicję prawdopodobieństwa**.

Założmy, że A i B są zdarzeniami w tym samym zbiorze Ω zdarzeń elementarnych.

Jeżeli każdemu zdarzeniu A zostanie przyporządkowana dokładnie jedna liczba rzeczywista $P(A)$ spełniająca warunki:

1. $P(A) \geq 0$,
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dla każdej pary zdarzeń wyłączających się A i B ,
3. $P(\Omega) = 1$,

to określoną w ten sposób na zdarzeniach w zbiorze Ω funkcję P nazywamy prawdopodobieństwem, zaś liczbę $P(A)$ prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia A .

Przykład 1. Rzucamy raz monetą symetryczną. W doświadczeniu tym: $\Omega = \{\omega_o, \omega_r\}$, a zdarzeniami są: $\emptyset, \{\omega_o\}, \{\omega_r\}, \Omega$. Na zdarzeniach tych określamy funkcję P następująco:

$$P(\emptyset) = 0, P(\{\omega_o\}) = \frac{1}{2}, P(\{\omega_r\}) = \frac{1}{2}, P(\Omega) = 1.$$

Bez trudu sprawdzamy, że funkcja ta spełnia wszystkie trzy warunki podanej definicji, jest więc prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach w zbiorze Ω .

Oczywiście, gdybyśmy na tych samych zdarzeniach określili inną funkcję P_1 , na przykład taką, że: $P_1(\emptyset) = 0$, $P_1(\{\omega_o\}) = \frac{2}{3}$, $P_1(\{\omega_r\}) = \frac{1}{3}$, $P_1(\Omega) = 1$, wówczas byłaby ona także prawdopodobieństwem (sprawdź, czy byłyby spełnione warunki 1–3 definicji prawdopodobieństwa).

Widzimy więc, że definicja prawdopodobieństwa nie narzuca wartości liczbowych przyporządkowanych zdarzeniom jako ich prawdopodobieństwa. Istotne jest, aby były one w zgodzie z trzema podanymi warunkami definicji prawdopodobieństwa. Teoretycznie nie jest ważne, czy w rzucie monetą orzeł wypada z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ czy też na przykład $\frac{1}{4}$, byleby prawdopodobieństwo wypadnięcia reszki było wtedy równe odpowiednio $\frac{1}{2}$ lub $\frac{3}{4}$ (ten drugi wynik mógłby się zdarzyć, gdybyśmy rzucali monetą obciążoną z jednej strony).

Rzucając monetą symetryczną, przyjmujemy oczywiście wypadnięcie orła i reszki z tym samym prawdopodobieństwem równym $\frac{1}{2}$. Gdy zaś moneta nie jest symetryczna i częstość wypadnięcia orła oscyluje wokół pewnej liczby p , rozsądnie jest przyjąć, że prawdopodobieństwo zajścia tego zdarzenia jest równe p .

Własności prawdopodobieństwa

Przyjrzyjmy się teraz własnościom prawdopodobieństwa, które wynikają z jego przyjętej ogólnej definicji. Sformułujmy je w postaci kilku twierdzeń.

Niech Ω będzie ustalonym zbiorem zdarzeń elementarnych, zaś P – prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach w tym zbiorze.

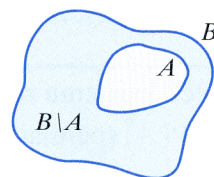
Twierdzenie 1.

Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego jest równe 0, czyli $P(\emptyset) = 0$.

Dowód. Dla dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ mamy równości: $A \cup \emptyset = A$ oraz $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Zatem na mocy warunku (2) definicji prawdopodobieństwa:

$$P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset), \text{ skąd } P(\emptyset) = 0. \quad \square$$



Ryc. 6.3.

Twierdzenie 2.

Jeżeli A i B są zdarzeniami w zbiorze Ω i zdarzenie A pociąga za sobą zdarzenie B , to $P(A) \leq P(B)$.

Dowód. Ponieważ $A \subset B$, więc $B = A \cup (B \setminus A)$ (ryc. 6.3).

Oczywiście zdarzenia A i $B \setminus A$ wyłączają się. Zatem na mocy warunku (2) definicji prawdopodobieństwa: $P(B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A)$.

Z kolei na mocy warunku (1) wspomnianej definicji: $P(B \setminus A) \geq 0$. Wobec tego $P(B) \geq P(A)$. \square

Twierdzenie 3.

Prawdopodobieństwo sumy dwóch zdarzeń jest równe sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń pomniejszonej o prawdopodobieństwo ich koniunkcji:

$$A, B \subset \Omega \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

□ Dowód. Dla dowolnych zdarzeń A i B zachodzą równości:

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A),$$

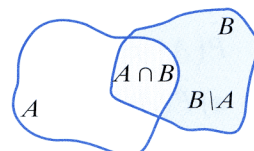
$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A) \text{ (ryc. 6.4).}$$

Ponieważ zdarzenia A i $B \setminus A$ oraz $A \cap B$ i $B \setminus A$ wyłączają się, więc w myśl warunku (2) definicji prawdopodobieństwa mamy równości:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A),$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A),$$

z których, po wyznaczeniu $P(B \setminus A)$ z drugiej równości i podstawieniu wyniku do pierwszej, otrzymujemy dowodzoną równość. □



Ryc. 6.4.

Twierdzenie 4.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A' przeciwnego do A w zbiorze Ω równe jest różnicy liczby 1 i prawdopodobieństwa zdarzenia A , a więc $P(A') = 1 - P(A)$.

□ Dowód. Ponieważ $A \cap A' = \emptyset$ i $A \cup A' = \Omega$, więc $P(A \cup A') = P(A) + P(A')$ oraz $P(A \cup A') = P(\Omega) = 1$. Stąd $P(A) + P(A') = 1$ i ostatecznie $P(A') = 1 - P(A)$. □

Pytania i zadania

1. Co to jest częstość zdarzenia i jakie ma ona własności?
2. Podaj ogólną definicję prawdopodobieństwa.
3. Czy definicja prawdopodobieństwa określa jednoznacznie prawdopodobieństwo poszczególnych zdarzeń w danej przestrzeni Ω zdarzeń elementarnych?
4. Ile wynosi prawdopodobieństwo zdarzenia:
 - a) pewnego,
 - b) niemożliwego?
5. Podaj wzór na prawdopodobieństwo sumy dowolnej pary zdarzeń A i B w tym samym zbiorze Ω .
6. Jaka zależność zachodzi między prawdopodobieństwami zdarzeń A i B , gdy $A \subset B$?
7. Uzasadnij, że dla każdego zdarzenia A zachodzi nierówność $P(A) \leq 1$.
8. Udowodnij, że jeżeli $A \subset B \subset \Omega$, to $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
9. Wykaż, że dla dowolnych zdarzeń A i B w tym samym zbiorze Ω zachodzi nierówność $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ oraz rozstrzygnij, kiedy w opisanym zbiorze zachodzi równość.



10. Zdarzenia A i B w pewnym zbiorze Ω spełniają warunki: $P(A') = \frac{1}{2}$, $P(B') = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Oblicz:
- a) $P(A \cup B)$; b) $P(A' \cup B')$; c) $P(A' \cap B')$.
11. Niech A i B będą takimi zdarzeniami w zbiorze Ω , że $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(B') = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$. Wyznacz:
- a) $P(A \cup B)$; b) $P(A' \cap B')$; c) $P(A' \cup B')$.
12. W pewnym zbiorze Ω są dane dwa zdarzenia A i B takie, że $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$. Czy zdarzenia te mogą się wyłączyć?
13. Wykaż, że jeżeli $P(A) + P(B) > 1$, to $A \cap B \neq \emptyset$.
14. Udowodnij, że jeżeli $P(A) + P(B) = 0$, to $P(A \cup B) = 0$.
15. Udowodnij, że jeżeli $P(A) = 1$ i $P(B) = 1$, to $P(A \cap B) = 1$.
- 16*. Udowodnij, że dla dowolnych zdarzeń A i B w tym samym zbiorze Ω zachodzi równość:

$$P(A) + P(A' \cap B) = P(B) + P(B' \cap A).$$
- 17*. Udowodnij, że dla dowolnych zdarzeń A, B, C w tym samym zbiorze Ω zachodzi równość:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$
- 18**. Niech A, B, C będą takimi zdarzeniami w tym samym zbiorze Ω , że:
- (1) $A \cup B \cup C = \Omega$,
 - (2) $P(B) = 2P(A)$, $P(C) = 3P(A)$,
 - (3) $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C)$.
- Wykaż, że $\frac{1}{6} \leq P(A) \leq \frac{1}{4}$.

8. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Wiemy już, że jeżeli A i B są zdarzeniami w tym samym zbiorze Ω zdarzeń elementarnych i wyłączają się, to prawdopodobieństwo ich sumy jest równe sumie ich prawdopodobieństw, a więc $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Zachodzi twierdzenie ogólniejsze, a mianowicie:

Twierdzenie 1.

Jeżeli A_1, A_2, \dots, A_n ($n \geq 2$) są zdarzeniami w tym samym zbiorze Ω i parami wyłączają się (to znaczy: każde dwa z nich się wyłączają), to prawdopodobieństwo sumy tych zdarzeń jest równe sumie ich prawdopodobieństw, czyli:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

*Dowód. Będzie to dowód indukcyjny względem n . Dla $n = 2$ twierdzenie to jest prawdziwe na mocy warunku 2. ogólnej definicji prawdopodobieństwa.

Wykażemy teraz, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$, jeśli twierdzenie to zachodzi dla dowolnych n zdarzeń parami wyłączających się, to zachodzi także dla dowolnych $n + 1$ zdarzeń parami się wyłączających. Niech więc $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ będą zdarzeniami, z których każde dwa się wyłączają, czyli $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla każdych i, j takich, że $i, j = 1, 2, \dots, n, n + 1$ oraz $i \neq j$.

Wówczas, korzystając z tego, że zdarzenia $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ i A_{n+1} wyłączają się (bo $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \cap A_{n+1} = (A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \dots \cup (A_n \cap A_{n+1}) = \emptyset$), oraz z założenia indukcyjnego, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}) &= P((A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \cup A_{n+1}) = \\ &= P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) + P(A_{n+1}) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + P(A_{n+1}). \end{aligned}$$

Na mocy indukcji matematycznej stwierdzamy prawdziwość naszego twierdzenia dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$. \square

Twierdzenie to pozwala obliczać prawdopodobieństwa pewnych zdarzeń złożonych, jeśli znamy prawdopodobieństwa zdarzeń prostszych, a w szczególności, gdy znamy prawdopodobieństwa zdarzeń jednoelementowych.

Istotnie, każde zdarzenie A w zbiorze:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}, \text{ a więc podzbiór } A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_n}\}, \text{ gdzie:}$$

$$\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subset \{1, 2, \dots, N\}, \text{ możemy zapisać jako sumę:}$$

$$A = \{\omega_{i_1}\} \cup \{\omega_{i_2}\} \cup \dots \cup \{\omega_{i_n}\}.$$

Ponieważ każde dwa zdarzenia spośród zdarzeń $\{\omega_{i_1}\}, \{\omega_{i_2}\}, \dots, \{\omega_{i_n}\}$ się wyłączają, to na mocy udowodnionego twierdzenia otrzymujemy równość:

$$(1) P(A) = P(\{\omega_{i_1}\} \cup \{\omega_{i_2}\} \cup \dots \cup \{\omega_{i_n}\}) = P(\{\omega_{i_1}\}) + P(\{\omega_{i_2}\}) + \dots + P(\{\omega_{i_n}\}).$$

Przyjmując oznaczenie:

$$(*) P(\{\omega_{i_j}\}) = p_{i_j} \text{ dla } i = 1, 2, \dots, N, \text{ równość (1) możemy przepisać równoważnie:}$$

$$(2) P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_n}.$$

Aby więc obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A , wystarczy znać prawdopodobieństwa zdarzeń jednoelementowych. Prawdopodobieństwa te nie mogą być dowolnymi liczbami. Precyzuje to kolejne twierdzenie.

Twierdzenie 2.

Prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia A w zbiorze Ω możemy obliczać ze wzoru (2) wtedy i tylko wtedy, gdy liczby p_1, p_2, \dots, p_N określone wzorem (*) spełniają warunki:

1. $p_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, N$;
2. $p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1$.

\square * Dowód. Załóżmy, że wzór (2) określa prawdopodobieństwo zdarzeń w zbiorze Ω . Wówczas nieujemność liczb p_1, p_2, \dots, p_N wynika z warunku 1. ogólnej definicji prawdopodobieństwa. Z kolei na mocy warunku 2. tej definicji mamy równość $p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1$,

gdyż $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\} = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \dots \cup \{\omega_N\}$, więc:

$$1 = P(\Omega) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + \dots + P(\{\omega_N\}) = p_1 + p_2 + \dots + p_N.$$

Założmy teraz, że liczby p_1, p_2, \dots, p_N spełniają obydwie podane w twierdzeniu warunki. Trzeba wykazać, że wzór (2) określa pewne prawdopodobieństwo zdarzeń w zbiorze Ω , czyli zachodzą trzy warunki ogólnej definicji prawdopodobieństwa.

Skoro jest spełniony warunek 1., to dla dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ jest $P(A) \geq 0$, zaś z warunku 2. wynika, że $P(\Omega) = 1$.

Pozostaje udowodnić, że dla każdej pary zdarzeń $A, B \subset \Omega$ i wyłączających się zachodzi równość $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Istotnie, jeśli $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_n}\}$ oraz $B = \{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \dots, \omega_{j_m}\}$ i $A \cap B = \emptyset, n + m \leq N$, to $A \cup B = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_n}, \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_m}\}$. Wobec tego ze wzoru (2):

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_n} + p_{j_1} + p_{j_2} + \dots + p_{j_m} = \\ &= (p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_n}) + (p_{j_1} + p_{j_2} + \dots + p_{j_m}) = P(A) + P(B). \quad \square \end{aligned}$$

Z powyższych rozważań wynika definicja:



Prawdopodobieństwem dowolnego zdarzenia A w danym zbiorze Ω zdarzeń elementarnych jest suma prawdopodobieństw wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających temu zdarzeniu. Jeżeli zdarzeniu A sprzyja tylko jedno zdarzenie elementarne, to prawdopodobieństwem zdarzenia A jest prawdopodobieństwo tego zdarzenia elementarnego. Jeżeli zdarzenie A jest niemożliwe, to prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe zeru.

Przykład 1. Rzucamy cztery razy pewną niesymetryczną monetą. Za zdarzenie elementarne przyjmijmy liczbę wyrzuconych orłów. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wyrzucimy parzystą liczbę orłów.

Rozwiązanie:

Zbiorem zdarzeń elementarnych jest tutaj zbiór $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Prawdopodobieństwo P zdarzeń w tym zbiorze określamy następująco:

$$P(\{0\}) = \frac{1}{16}, \quad P(\{1\}) = \frac{4}{16}, \quad P(\{2\}) = \frac{6}{16}, \quad P(\{3\}) = \frac{4}{16}, \quad P(\{4\}) = \frac{1}{16}.$$

Zdarzeniem, którego prawdopodobieństwo mamy obliczyć, jest zbiór $A = \{0, 2, 4\}$. Zatem:

$$P(A) = P(\{0\}) + P(\{2\}) + P(\{4\}) = \frac{1}{16} + \frac{6}{16} + \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}.$$

Przykład 2. Rzucamy raz dwiema kostkami do gry. Za zdarzenie elementarne przyjmijmy sumę liczb wyrzuconych oczek na obu kostkach. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wyrzucona suma oczek okaże się liczbą pierwszą.

Rozwiązanie:

Zbiorem zdarzeń elementarnych jest tutaj zbiór $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Prawdopodobieństwo P zdarzeń w tym zbiorze określamy następująco:

$$P(\{2\}) = P(\{12\}) = \frac{1}{36}, \quad P(\{3\}) = P(\{11\}) = \frac{2}{36},$$

$$P(\{4\}) = P(\{10\}) = \frac{3}{36}, \quad P(\{5\}) = P(\{9\}) = \frac{4}{36},$$

$$P(\{6\}) = P(\{8\}) = \frac{5}{36}, \quad P(\{7\}) = \frac{6}{36}.$$

Wszystkie przyporządkowane zdarzeniom elementarnym liczby są dodatnie i suma ich wynosi 1. Zdarzeniem, którego prawdopodobieństwo mamy obliczyć, jest zbiór $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$. Zatem:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) + P(\{7\}) + P(\{11\}) = \\ &= \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{4}{36} + \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Przyjmijmy, że w zbiorze N zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ wszystkie zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne, czyli ich prawdopodobieństwa są równe (a więc równe $\frac{1}{N}$, gdyż $p_1 = p_2 = \dots = p_N$ i $p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1$). Wówczas prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia A , któremu sprzyja n zdarzeń elementarnych, jest równe $\frac{n}{N}$.

Prawdziwe jest zatem następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia A w zbiorze Ω zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych jest równe ilorazowi liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A przez liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych w zbiorze Ω .

Twierdzenie to nosi nazwę **klasycznej definicji prawdopodobieństwa**.

Przykład 1. Rzucamy raz kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby oczek nie większej niż 4.

Rozwiązanie:

Wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych jest tutaj 6, są one jednakowo prawdopodobne, a zdarzeniu, którego prawdopodobieństwo mamy obliczyć, sprzyjają 4 zdarzenia elementarne. Zatem poszukiwane prawdopodobieństwo, na mocy klasycznej definicji prawdopodobieństwa, wynosi $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Przykład 2. Z urny zawierającej pięć kul białych i siedem czarnych wyjmujemy losowo jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że będzie to kula biała, jeśli zakładamy, że każdą kulę wyjmujemy z tym samym prawdopodobieństwem?

Rozwiązanie:

Zdarzeniem elementarnym jest tutaj losowo wyjęta kula. Zatem wszystkich zdarzeń elementarnych mamy 12. Wśród nich 5 sprzyja zdarzeniu, którego prawdopodobieństwa poszukujemy.

Korzystając z definicji klasycznej, możemy obliczyć, że prawdopodobieństwo to wynosi $\frac{5}{12}$.

Przykład 3. Z talii 52 kart wyciągamy losowo jedną kartę. Zakładając, że wyciągnięcie każdej karty z tej talii jest jednakowo prawdopodobne, oblicz prawdopodobieństwo wylosowania figury (waleta, damy lub króla).

Rozwiązanie:

Zdarzeniem elementarnym jest tutaj losowo wyciągnięta karta, dlatego wszystkich zdarzeń elementarnych mamy 52 (tyle, ile kart w talii). Zdarzeniu, którego prawdopodobieństwo chcemy obliczyć, sprzyja 12 zdarzeń elementarnych (tyle bowiem jest figur w zwykłej talii: po cztery walety, damy i króle). Zatem, na mocy klasycznej definicji prawdopodobieństwa, poszukiwane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{12}{52} = \frac{3}{13}$.



Pytania i zadania

1. Jak obliczamy prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia w skończonym zbiorze Ω zdarzeń elementarnych?
2. Jak brzmi klasyczna definicja prawdopodobieństwa?
3. Rzucamy dwukrotnie kostką do gry. Za zdarzenie elementarne przyjmujemy iloczyn liczb wyrzuconych oczek. Oblicz prawdopodobieństwo, że iloczyn ten jest liczbą nieparzystą.
4. Rzucamy trzy razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że orzeł wypadnie co najwyżej dwa razy.
5. Z talii 52 kart wyciągamy losowo jedną kartę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania karty koloru pik.
6. Spośród cyfr 1, 2, 3, 4, 5 wybieramy jedną, a następnie z pozostałych czterech jeszcze jedną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że cyfrę parzystą wybierzemy:
 - a) za pierwszym razem,
 - b) za drugim razem,
 - c) za pierwszym i za drugim razem.
7. Z talii 52 kart wyciągamy losowo jedną kartę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jest ona asem lub pikiem.
8. Z urny zawierającej pięć kul czarnych i dziesięć białych losujemy jedną kulę. Jeśli wyciągnięcie każdej kuli jest jednakowo prawdopodobne, to jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to kula:
 - a) czarna, b) biała?
9. Pan Kowalski ma dwoje dzieci. Co najmniej jedno jest chłopcem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że są to dwaj chłopcy?
10. Pani Nowak ma dwoje dzieci. Starsze jest dziewczynką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że są to dwie dziewczynki?

9. Zastosowanie klasycznej definicji prawdopodobieństwa

Obecnie zajmiemy się przykładami zastosowań poznanych własności prawdopodobieństwa, wzorów kombinatorycznych i klasycznej definicji prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństwa zdarzeń. We wszystkich rozważanych przykładach będziemy przyjmować zdarzenia elementarne za jednakowo prawdopodobne.

Przykład 1. Rzucamy trzy razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że choć raz wypadnie orzeł?

Rozwiązanie:

Zdarzeniem elementarnym jest tutaj trójwyrazowy ciąg wyników poszczególnych rzutów: $\omega = (m_1, m_2, m_3)$, gdzie m_i jest wynikiem i -tego rzutu, którym oczywiście może być orzeł lub reszka ($i = 1, 2, 3$), czyli trójwyrazowa wariacja z powtórzeniami zbioru $\{O, R\}$. Zatem:

$$\Omega = \{ \omega = (m_1, m_2, m_3); m_i \in \{O, R\}, i = 1, 2, 3 \}, \text{ więc } |\Omega| = W_2^3 = 2^3.$$

Niech A będzie zdarzeniem, że co najmniej raz wypadł orzeł. Wobec tego zdarzenie A' – przeciwne do zdarzenia A – jest zdarzeniem, że ani razu nie wypadł orzeł. Zdarzeniu A' sprzyja tylko jedno zdarzenie elementarne: $\omega = (R, R, R)$. Stąd $P(A') = \frac{1}{8}$ i wobec tego szukane prawdopodobieństwo: $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

Przykład 2. Rzucamy cztery razy kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że choć raz wypadną co najmniej trzy oczka?

Rozwiązanie:

Zdarzeniem elementarnym jest tutaj czterowyrazowy ciąg o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\omega = (k_1, k_2, k_3, k_4)$, gdzie k_i jest wynikiem i -tego rzutu ($i = 1, 2, 3, 4$), czyli zdarzeniem elementarnym jest czterowyrazowa wariacja z powtórzeniami zbioru sześcioelementowego. Tak więc $\Omega = \{ \omega = (k_1, k_2, k_3, k_4); k_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, i \in \{1, 2, 3, 4\} \}$ i $|\Omega| = W_6^4 = 6^4$.

Niech A będzie zdarzeniem, o którym mowa w zadaniu. Rozpatrzmy jeszcze zdarzenie przeciwne do zdarzenia A , czyli zdarzenie:

A' : „za każdym razem wypadną co najwyżej dwa oczka”.

Zdarzeniu A' sprzyjają wszystkie te ciągi czterowyrazowe, których wyrazami są liczby ze zbioru $\{1, 2\}$, a więc czterowyrazowe wariacje z powtórzeniami zbioru dwuelementowego.

Zatem:

$A' = \{ \omega = (k_1, k_2, k_3, k_4); k_i \in \{1, 2\}, i \in \{1, 2, 3, 4\} \}$ i oczywiście $|A'| = W_2^4 = 2^4$. Wobec

tego szukane prawdopodobieństwo $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{|A'|}{|\Omega|} = 1 - \frac{2^4}{6^4} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{80}{81}$.

Wobec tego szukane prawdopodobieństwo $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4^4}{6^4} = \left(\frac{4}{6}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$.

Przykład 3. Rzucamy pięć razy kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w każdym rzucie wypadnie: a) inna liczba oczek, b) ta sama liczba oczek.

Rozwiązanie:

Zdarzeniem elementarnym jest tutaj każdy pięciowyrazowy ciąg o wyrazach ze zbioru sześćcioelementowego $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, czyli pięciowyrazowa wariacja z powtórzeniami tego zbioru. Zatem $\Omega = \{\omega = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5); k_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$ i oczywiście $|\Omega| = W_6^5 = 6^5$ (tyle, ile jest wszystkich pięciowyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru sześćcioelementowego).

a) Niech A będzie takim zdarzeniem, że w każdym rzucie wypadnie inna liczba oczek. Zdarzeniu A sprzyja więc każda pięciowyrazowa wariacja bez powtórzeń zbioru sześćcioelementowego.

Stąd $|A| = V_6^5 = \frac{6!}{(6-5)!} = \frac{6!}{1!} = 6!$. Znając $|A|$ i $|\Omega|$, możemy skorzystać z klasycznej definicji prawdopodobieństwa:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6!}{6^5} = \frac{5!}{6^4} = \frac{5}{54}.$$

b) Niech B będzie takim zdarzeniem, że w każdym rzucie wypadnie ta sama liczba oczek, co zapiszemy: $B = \{(1, 1, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 2, 2), (3, 3, 3, 3, 3), (4, 4, 4, 4, 4), (5, 5, 5, 5, 5), (6, 6, 6, 6, 6)\}$.

Stąd wynika, że $|B| = 6$ i możemy zastosować klasyczną definicję prawdopodobieństwa:

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6}{6^5} = \frac{1}{6^4} = \frac{1}{1296}.$$

Przykład 4. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że skreślając w jednym okienku kuponu Dużego Lotka 6 liczb spośród 49, poprawnie wytypujemy w najbliższym losowaniu tej gry:

a) „szóstkę”, b) „piątkę”, c) „czwórkę”, d) „trójkę”.

Rozwiązanie:

W każdym losowaniu tej gry wybiera się 6 spośród 49 liczb i każdy zbiór 6 spośród tych 49 liczb może być wylosowany. Zdarzeniem elementarnym jest więc tutaj sześćcioelementowy podzbiór (sześćcioelementowa kombinacja) zbioru 49-elementowego. Możemy więc zapisać, że:

$$\Omega = \{\omega = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6\}; l_i \in \{1, 2, 3, \dots, 49\}, i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

$$\text{i } |\Omega| = C_{49}^6 = \binom{49}{6} = 13983816.$$

a) Niech A będzie zdarzeniem, że trafiliśmy „szóstkę”. Zdarzeniu temu sprzyja tylko jedno zdarzenie elementarne (gdy skreślone przez nas liczby zostaną wybrane w najbliższym losowaniu):

$|A| = 1$. Teraz możemy obliczyć prawdopodobieństwa trafienia „szóstki”:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{13983816} \approx 0,00000007.$$

b) Oznaczmy przez B takie zdarzenie, że trafiliśmy „piątkę”. Zdarzeniu temu sprzyjają te sześćcioelementowe kombinacje, w których znajdzie się 5 spośród wytypowanych w najbliższym losowaniu 6 liczb i jedna – spoza tej szóstki. Tych 5 właściwie przez nas wybranych liczb możemy skreślić na $C_6^5 = \binom{6}{5} = 6$ sposobów, a tę jedną – na $C_{43}^1 = \binom{43}{1} = 43$ sposoby.

Obliczamy na podstawie tych danych, że $|B| = 6 \cdot 43 = 258$ i prawdopodobieństwo tra-

$$\text{fienia „piątki” } P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{258}{13983816} \approx 0,00002.$$

c) Niech C oznacza takie zdarzenie, że trafiliśmy „czwórkę”. Analogicznie do poprzedniego przypadku oznacza to właściwe wytypowanie 4 spośród 6 skreślonych liczb. Pozostałe 2 skreślone liczby należą do 43 niewylosowanych liczb. Zatem:

$$|C| = C_6^4 \cdot C_{43}^2 = \binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} = 13545 \text{ i } P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{13545}{13983816} \approx 0,00096862.$$

d) Niech D będzie takim zdarzeniem, że trafiliśmy „trójkę”. Zdarzeniu temu sprzyjają te sześćoelementowe kombinacje zbioru $\{1, 2, \dots, 49\}$, które zawierają 3 spośród 6 liczb, które zostały wylosowane i 3 spośród 43 niewylosowanych liczb. Zatem:

$$|D| = C_6^3 \cdot C_{43}^3 = \binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3} = 246820 \text{ i } P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{246820}{13983816} \approx 0,018.$$

Przykład 5. Do windy na parterze dziesięciopiętrowego wieżowca wsiadło 6 osób. Wyznacz prawdopodobieństwo tego, że każda z nich wysiądzie na innym piętrze.

Rozwiązanie:

Ponumerujmy osoby w windzie liczbami od 1 do 6, a piętra oznaczmy przez p_1, p_2, \dots, p_{10} . Przyporządkujmy każdej z osób piętro, na którym ma ona zamiar wysiąść. Wtedy będziemy mogli rozkład wysiadań jadących windą osób utożsamiać z sześciowyrazowym ciągiem o wyrazach (niekoniecznie różnych) ze zbioru $\{p_1, p_2, \dots, p_{10}\}$. Na przykład ciąg: $(p_1, p_1, p_1, p_1, p_1, p_1)$ oznacza, że wszystkie osoby wysiadły na pierwszym piętrze, a ciąg $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$ – że wysiadły na pierwszych sześciu piętrach. Każdy rozkład wysiadań tych osób, a więc odpowiadający mu sześciowyrazowy ciąg o wyrazach (niekoniecznie różnych) ze zbioru dziesięcioelementowego $\{p_1, p_2, \dots, p_{10}\}$, to oczywiście zdarzenie elementarne. Zatem wszystkich zdarzeń elementarnych mamy tutaj tyle, ile wszystkich sześciowyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru dziesięcioelementowego. Tak więc:

$$|\Omega| = W_{10}^6 = 10^6.$$

Niech A będzie takim zdarzeniem, że wszystkie jadące tą windą osoby wysiądą na różnych piętrach. Zdarzeniu A sprzyjają rozkłady wysiadań odpowiadające sześciowyrazowym ciągom o różnych wyrazach ze zbioru $\{p_1, p_2, \dots, p_{10}\}$, czyli sześciowyrazowym wariacjom bez powtórzeń tego zbioru. Po obliczeniu $|A| = V_{10}^6 = \frac{10!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$ możemy wyznaczyć prawdopodobieństwo:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{10^6} \approx 0,15.$$

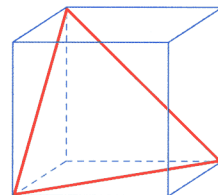
Przykład 6. Spośród wierzchołków sześciianu wybieramy losowo 3 wierzchołki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wybrane 3 wierzchołki wyznaczają trójkąt równoboczny.

Rozwiązanie:

Za zdarzenie elementarne przyjmujemy każdy trójelementowy podzbiór zbioru 8 wierzchołków sześciianu. Zdarzeń elementarnych jest więc $C_8^3 = \binom{8}{3} = 56$ (tyle, ile trójelemento-

wych kombinacji zbioru ośmioelementowego). Zatem $|\Omega| = 56$. Niech A będzie zdarzeniem, którego prawdopodobieństwo mamy obliczyć. Wybrane 3 wierzchołki sześcianu wyznaczają trójkąt równoboczny, gdy żadnych dwóch z nich nie łączy krawędź (ryc. 6.5).

Trójkąt takich jest tyle, ile wierzchołków sześcianu: $|A| = 8$. Wobec tego $P(A) = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$.



Ryc. 6.5.

Przykład 7. Na półce ustawiono 10 książek w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wybrane 3 z nich znajdują się obok siebie.

Rozwiązanie:

Zdarzeniem elementarnym jest tutaj każde ustawienie 10 książek na półce, czyli dowolna permutacja zbioru dziesięcioelementowego. Wszystkich zdarzeń jest więc $10!$ (tyle, ile jest permutacji tego zbioru). Niech A będzie interesującym nas zdarzeniem, że wybrane 3 książki stoją obok siebie. Obliczmy, ile zdarzeń elementarnych sprzyja temu zdarzeniu. Wybrane 3 książki mogą stać obok siebie na $3!$ sposobów i zajmować przy tym miejsca 1, 2, 3 lub 2, 3, 4 itd. aż do 8, 9, 10 (możliwości tych jest 8). Pozostałych 7 książek ustawiamy dowolnie na $7!$ sposobów. Wobec tego wszystkich ustawień książek takich, aby spełniony był warunek zadania, jest $3! \cdot 8 \cdot 7! = 3! \cdot 8!$. Tyle więc zdarzeń elementarnych sprzyja zdarzeniu A . Zatem: $P(A) = \frac{3! \cdot 8!}{10!} = \frac{6}{9 \cdot 10} = \frac{1}{15}$.

Przykład 8*. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 2n - 1, 2n\}$ losujemy dwukrotnie ze zwracaniem po jednej liczbie. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że iloraz pierwszej wylosowanej liczby przez drugą jest liczbą z przedziału $(1; 2)$.

Rozwiązanie:

Zdarzeniem elementarnym jest tutaj para liczb (l, m) – niekoniecznie różnych, ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 2n - 1, 2n\}$, czyli dwuwyzrazowa wariacja z powtórzeniami tego zbioru. Zatem $\Omega = \{\omega = (l, m); l, m \in \{1, 2, 3, \dots, 2n - 1, 2n\}\}$ i $|\Omega| = W_{2n}^2 = (2n)^2 = 4n^2$.

Niech A będzie zdarzeniem, którego prawdopodobieństwo mamy wyznaczyć:

$A = \{\omega = (l, m); l, m \in \{1, 2, 3, \dots, 2n - 1, 2n\} \text{ i } \frac{l}{m} \in (1; 2)\}$. Obliczmy, ile zdarzeń elementarnych sprzyja zdarzeniu A .

Ułamek $\frac{l}{m} \in (1; 2)$, gdy m jest jedną z liczb ze zbioru $\{1, 2, \dots, 2n - 1\}$, zaś $m < l \leq 2m$. Jeśli $m \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, to l może być którąkolwiek z m liczb ze zbioru $\{m + 1, m + 2, \dots, 2m\}$. Gdy zaś $m \in \{n + 1, n + 2, \dots, 2n - 1\}$, wtedy zawsze $2m > 2n$ i liczba l może być którąkolwiek z $2n - m$ liczb ze zbioru $\{m + 1, m + 2, \dots, 2n\}$. Tak więc:

$$\begin{aligned} |A| &= (1 + 2 + \dots + n) + (n - 1 + n - 2 + n - 3 + \dots + 2 + 1) = \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 \text{ i poszukiwane prawdopodobieństwo } P(A) = \frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Przykład 9. W turnieju szachowym uczestniczy 20 zawodników rozdzielonych losowo na dwie grupy po 10 osób. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- a) dwóch najlepszych zawodników będzie grać w różnych grupach;
 b) czterech najlepszych zawodników zagra po dwóch w różnych grupach.

Rozwiązanie:

Zdarzeniem elementarnym jest tutaj każdy podział uczestników turnieju na dwie równoliczne grupy, a tych podziałów – zdarzeń elementarnych – jest tyle, ile możliwych wyborów 10 spośród 20 osób, czyli $|\Omega| = C_{20}^{10} = \binom{20}{10}$.

- a) Niech A będzie takim zdarzeniem, że dwóch najlepszych zawodników zagra w różnych grupach. Obliczmy, ile zdarzeń elementarnych sprzyja zdarzeniu A .

Podziału dokonujemy następująco: wyłączamy dwóch najlepszych i dokonujemy podziału pozostałych 18 zawodników na dwie równoliczne grupy, a następnie dołączamy do każdej z nich po jednym z tych dwóch najlepszych zawodników. Zdarzeniu A sprzyja więc $\binom{18}{9} \cdot \binom{2}{1}$ zdarzeń elementarnych, poszukiwane więc prawdopodobieństwo:

$$P(A) = \frac{\binom{18}{9} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{20}{10}} = \frac{10}{19}.$$

- b) Niech B będzie takim zdarzeniem, że czterech najlepszych zawodników zagra po dwóch w różnych grupach. Dwóch zawodników spośród czterech wybieramy na $\binom{4}{2}$ sposobów, a podziału 16 zawodników na dwie równoliczne grupy dokonujemy na $\binom{16}{8}$ sposobów.

Zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu B jest zatem $\binom{4}{2} \cdot \binom{16}{8}$, poszukiwane

więc prawdopodobieństwo $P(B) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{16}{8}}{\binom{20}{10}} = \frac{135}{323}$.

Przykład 10*. W pewnym turnieju szachowym bierze udział 8 seniorów, 6 juniorów i 2 młodzików. Każdy z uczestników ma rozegrać jeden mecz, a pary zawodników grających ze sobą ustalono drogą losowania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że we wszystkich meczach spotkają się zawodnicy tej samej kategorii wiekowej.

Rozwiązanie:

Za zdarzenie elementarne przyjmujemy dowolny podział 16 zawodników na pary rozgrywane ze sobą mecz. Każdemu takiemu podziałowi odpowiada podział zbioru 16-elementowego na rozłączne zbiory dwuelementowe. Tych podziałów jest:

$$\frac{\binom{16}{2} \cdot \binom{14}{2} \cdot \binom{12}{2} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}}{8!} = \frac{16!}{8! \cdot 2^8}.$$

Niech A będzie takim zdarzeniem, że we wszystkich meczach spotkają się zawodnicy tej samej kategorii wiekowej. Zdarzeniu A sprzyjają te podziały 16 zawodników na rozłączne pary rozgrywane ze sobą mecz, które obejmują podziały na takie pary w obrębie każdej z grup wiekowych.

Seniorów można podzielić na pary na $\frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}}{4!} = \frac{8!}{4! \cdot 2^4}$ sposobów, juniorów na $\frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}}{3!} = \frac{6!}{3! \cdot 2^3}$ sposobów, a młodzików na 1 sposób, więc zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A jest:

$$|A| = \frac{8!}{4! \cdot 2^4} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 2^3} \cdot 1 = \frac{8! \cdot 6!}{3! \cdot 4! \cdot 2^7}.$$

Możemy zatem obliczyć poszukiwane prawdopodobieństwo:

$$P(A) = \frac{\frac{8! \cdot 6!}{3! \cdot 4! \cdot 2^7}}{\frac{16!}{8! \cdot 2^8}} = \frac{8! \cdot 6!}{3! \cdot 4! \cdot 2^7} \cdot \frac{8! \cdot 2^8}{16!} = \frac{1}{1287}.$$



Pytania i zadania

1. Rzucamy dziesięć razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że choć raz wypadnie reszka?
2. Rzucamy pięć razy kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że choć raz wypadną nie więcej niż cztery oczka.
3. Rzucamy cztery razy kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że 3 kolejne wyniki utworzą ciąg geometryczny?
4. Rzucamy sześć razy kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w co najmniej jednym rzucie liczba wyrzuconych oczek będzie równa numerowi rzutu.
5. Pięć kul rozmieszczono w dwóch szufladach. Wyznacz prawdopodobieństwo tego, że żadna z szuflad nie jest pusta.
6. Dwadzieścia drużyn uczestniczących w turnieju rozdzielono losowo na dwie równoliczne grupy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dwie ustalone drużyny znajdą się:
 - a) w różnych grupach;
 - b) w tej samej grupie?
7. Autobus, w którym znajduje się ośmiu pasażerów, zatrzymuje się na dziesięciu przystankach. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że każdy z pasażerów wysiądzie na innym przystanku.
8. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 2n - 1\}$ wybieramy jedną liczbę, a następnie drugą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
 - a) za pierwszym razem wybierzemy liczbę nieparzystą;
 - b) za drugim razem wybierzemy liczbę nieparzystą;
 - c) obie wybrane liczby będą nieparzyste.
9. W urnie znajduje się dziesięć kul białych i dwadzieścia czarnych. Losujemy kolejno bez zwracania dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że druga z wylosowanych kul będzie biała.

10. Spośród wierzchołków sześciokąta foremnego wybrano losowo 3 wierzchołki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wyznaczają one trójkąt równoboczny.
11. Spośród wierzchołków prostopadłościanu wybrano losowo 4 wierzchołki. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wyznaczają one prostokąt?
12. W sali egzaminacyjnej posadzono losowo w jednym rzędzie 10 uczniów, w tym 2 z tej samej klasy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że nie siedzą oni obok siebie?
- 13*. Rozpatrujemy zbiór ciągów n -wyrazowych (gdzie $n \in \mathbb{N}_+$) o wyrazach ze zbioru $\{-1, 0, 1\}$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany ciąg ma co najwyżej jeden wyraz równy 0 i suma jego wyrazów jest równa 0.
- 14**. Spośród liczb $1, 2, 3, \dots, 3n$ ($n \geq 2$) wybieramy losowo cztery różne liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma wybranych liczb dzieli się przez 3.
- 15**. W urnie znajduje się b kul białych i c kul czarnych (gdzie $b, c \in \mathbb{N}_+$). Losujemy kolejno (ze zwracaniem) dwie kule. Udowodnij, że prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul jednakowego koloru jest nie mniejsze niż $\frac{1}{2}$.
- 16**. Ze zbioru wszystkich łamanych $ABCD A$, gdzie A, B, C, D są różnymi wierzchołkami danego 2004-kąta foremnego, wybieramy losowo jedną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jest ona brzegiem czworokąta wypukłego.
- 17**. Z urny zawierającej jedną kulę oznaczoną numerem 1, dwie kule oznaczone numerem 2, trzy kule – numerem 3, ..., n kul oznaczonych numerem n wyciągamy bez zwracania dwie kule. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że obie wyciągnięte kule mają ten sam numer?

10. Prawdopodobieństwo warunkowe

Zacznijmy od rozważenia pewnego przykładu.

Przykład 1. Rzucamy trzy razy symetryczną kostką sześcienną do gry. Z jakim prawdopodobieństwem wyrzucimy szóstkę co najmniej raz, jeśli za każdym razem wypadnie parzysta liczba oczek?

Rozwiązanie:

Zdarzeniami elementarnymi są tutaj trójwyrazowe ciągi wyników poszczególnych rzutów $\omega = (k_1, k_2, k_3)$ i oczywiście wszystkie te zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. Jeśli przyjmiemy, że k_i to wynik i -tego rzutu, wówczas:

$$\Omega = \{\omega = (k_1, k_2, k_3); k_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, i = 1, 2, 3\};$$

$$|\Omega| = W_6^3 = 6^3 = 216.$$

Niech A oznacza zdarzenie: co najmniej raz wypadła szóstka. Łatwo obliczyć, że $|A| = 91$; (wystarczy od liczby wszystkich zdarzeń elementarnych odjąć liczby wszystkich trójwyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, czyli liczbę $5^3 = 125$). Zatem $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{91}{216}$.

W rozpatrywanej sytuacji został określony pewien warunek: w każdym rzucie powinniśmy otrzymać parzystą liczbę oczek. Oznaczmy to zdarzenie przez B . Zdarzeniu B sprzyjają te trójwyrazowe ciągi, których wyrazami są liczby 2, 4, 6. Zatem:

$$B = \left\{ \omega = (k_1, k_2, k_3); k_i \in \{2, 4, 6\}, i = 1, 2, 3 \right\}, \text{ więc } |B| = W_3^3 = 3^3 = 27.$$

Zobaczymy teraz, jakie będzie prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A , gdy zajdzie zdarzenie B . Rozważania nasze musimy więc ograniczyć tylko do tych zdarzeń elementarnych, które sprzyjają zdarzeniu B . Spośród nich zdarzeniu A sprzyjają jedynie te ciągi trójwymiarowe, których co najmniej jeden wyraz jest równy 6. Łatwo obliczyć, że zdarzeń takich mamy 19. Wobec tego prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A wyniesie teraz $\frac{19}{27}$.

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A **pod warunkiem**, że zaszło zdarzenie B , oznaczać będziemy symbolem $P(A|B)$ i nazywać prawdopodobieństwem warunkowym.

$$\text{W naszym przykładzie prawdopodobieństwo warunkowe } P(A|B) = \frac{19}{27}.$$

Zauważmy, że prawdopodobieństwo to obliczyliśmy na podstawie definicji klasycznej prawdopodobieństwa, dzieląc liczbę $19 = |A \cap B|$ przez liczbę $27 = |B|$. W ten sposób otrzymaliśmy wzór:

$$(*) P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|},$$

nie wiedząc jeszcze, co oznacza liczba $P(A|B)$, lecz kierując się jedynie intuicją. Za pomocą tego wzoru nie możemy jednak obliczać prawdopodobieństwa warunkowego w każdej sytuacji, ponieważ dotyczy on tylko doświadczeń, których wyniki są jednakowo prawdopodobne.

Podzielmy licznik i mianownik ułamka po prawej stronie wzoru (*) przez $|\Omega|$. Otrzymamy wówczas:

$$P(A|B) = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Okazuje się, że wzór:

$$(**) P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

można stosować nie tylko do przypadku klasycznego, ale również w ogólnej sytuacji. Na tej podstawie możemy sformułować definicję prawdopodobieństwa warunkowego.

Niech Ω będzie danym zbiorem zdarzeń elementarnych, zaś $B \subset \Omega$ – takim zdarzeniem, że $P(B) > 0$.

Prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia $A \subset \Omega$ pod warunkiem, że zajdzie takie zdarzenie $B \subset \Omega$, że $P(B) > 0$, nazywamy liczbę:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Sprawdźmy, czy przyporządkowana każdemu zdarzeniu $A \subset \Omega$ liczba $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

spełnia warunki 1–3 ogólnej definicji prawdopodobieństwa:

Warunek 1. tej definicji jest oczywiście spełniony, gdyż $P(A \cap B) \geq 0$, $P(B) > 0$, więc:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0.$$

Warunek 2. Niech $A_1, A_2 \subset \Omega$ będą dowolnymi zdarzeniami wyłączającymi się. Jeśli $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, wtedy również $(A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = \emptyset$ i wówczas:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 | B) &= \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{P(B)} = \\ &= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = P(A_1 | B) + P(A_2 | B). \end{aligned}$$

Warunek 3. $P(\Omega | B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$.

Prawdziwe jest zatem następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Funkcja $P(A|B)$ jest prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach $A \subset \Omega$.

Przykład 2. Z urny zawierającej trzy kule białe i cztery czarne losujemy kolejno dwie kule, bez zwracania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że za drugim razem wyciągniemy kulę białą, jeśli za pierwszym razem wyciągnęliśmy czarną?

Rozwiązanie:

Zbiorem Ω zdarzeń elementarnych jest tutaj zbiór wszystkich uporządkowanych par $\omega = (k, l)$, gdzie k to kula wylosowana za pierwszym razem, zaś l – kula wylosowana za drugim razem. Zatem $|\Omega| = V_7^2 = \frac{7!}{5!} = 7 \cdot 6 = 42$. Niech A i B będą odpowiednio zdarzeniami:

- „wyciągnięcie kuli białej za drugim razem”,
- „wyciągnięcie kuli czarnej za pierwszym razem”.

Zdarzeniu B sprzyjają $4 \cdot 6 = 24$ zdarzenia elementarne, a zdarzeniu $A \cap B$ sprzyja $3 \cdot 4 = 12$ zdarzeń elementarnych. Wobec tego:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{12}{42}}{\frac{24}{42}} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

Odpowiedź: $P(A|B) = \frac{1}{2}$.

Ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe wynika wniosek:

Wniosek. Dla dowolnej pary zdarzeń $A, B \subset \Omega$ takich, że $P(B) > 0$, zachodzi równość:
 $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$.

Przykład 3. Abiturient przystępuje do egzaminu składającego się z części pisemnej i części ustnej. Warunkiem przystąpienia do części ustnej jest pozytywne zaliczenie części pisemnej. Jakie jest prawdopodobieństwo zdania egzaminu, jeśli prawdopodobieństwa zaliczenia przez abiturienta części pisemnej i ustnej wynoszą odpowiednio $\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{2}$?

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez A i B odpowiednio zdarzenia:

- „pozytywny wynik z części pisemnej”,
- „pozytywny wynik z części ustnej”.

Wówczas „zdanie egzaminu” jest zdarzeniem $A \cap B$. Ponieważ $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B|A) = \frac{1}{2}$, więc

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A) \cdot \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo, że abiturient zda ten egzamin, wynosi $\frac{1}{3}$.

Przykład 4. Z talii 52 kart do gry losujemy kolejno 3 karty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że żaden kolor się nie powtórzy?

Rozwiązanie:

Niech A i B oznaczają odpowiednio zdarzenia:

- „druga karta jest innego koloru niż pierwsza”,
- „trzecia karta jest innego koloru niż poprzednie”.

Ponieważ drugą kartę wybieramy spośród 51 kart, przy czym możliwości wyboru, aby nie była ona tego koloru, co pierwsza, mamy $3 \cdot 13 = 39$, więc $P(A) = \frac{3 \cdot 13}{51} = \frac{13}{17}$. Przy założeniu, że dwie pierwsze karty są różnego koloru, trzecią wybieramy spośród 50 kart na $2 \cdot 13 = 26$ sposobów. Zatem $P(B|A) = \frac{26}{50} = \frac{13}{25}$. Wobec tego:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{13}{17} \cdot \frac{13}{25} = \frac{169}{425}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo, że żaden kolor się nie powtórzy, wynosi $\frac{169}{425}$.

Przykład 5. Udowodnij, że jeżeli $P(A) = 0,9$ i $P(B) = 0,8$, to $P(A|B) \geq 0,875$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1 - P((A \cap B)')}{P(B)} = \frac{1 - P(A' \cup B')}{P(B)} = \\ &= \frac{1 - (P(A') + P(B') - P(A' \cap B'))}{P(B)} = \frac{1 - P(A') - P(B') + P(A' \cap B')}{P(B)} \geq \\ &\geq \frac{1 - P(A') - P(B')}{P(B)} = \frac{P(A) - (1 - P(B))}{P(B)} = \frac{P(A) + P(B) - 1}{P(B)} = \\ &= \frac{0,9 + 0,8 - 1}{0,8} = \frac{7}{8} = 0,875. \end{aligned}$$



Pytania i zadania

- Podaj definicję prawdopodobieństwa warunkowego.
- Rzucamy raz trzema symetrycznymi kostkami do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najmniej na jednej kostce wypadnie jedynka, jeśli na każdej kostce wypadnie inna liczba oczek?
- W urnie jest sześć kul białych i trzy kule czarne. Wyciągamy losowo kulę, zatrzymujemy ją, a następnie wyciągamy drugą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągniemy:
 - dwie kule białe,
 - dwie kule czarne?
- Udowodnij, że dla dowolnej pary zdarzeń $A, B \subset \Omega$ takich, że $P(A) > 0, P(B) > 0$:
 - $P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$;
 - jeśli $P(A|B) > P(A)$, to $P(B|A) > P(B)$.
- Udowodnij, że jeżeli $A, B, C \subset \Omega$ są takimi zdarzeniami, że $P(A) > 0, P(A \cap B) > 0$, to $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$.
- * Wykaż, że jeżeli $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \subset \Omega$ są takimi zdarzeniami, że $P(A_1) > 0, P(A_1 \cap A_2) > 0, \dots, P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$, to $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$.
- Oblicz $P(A|B)$, jeśli wiadomo, że $P(A) = \frac{1}{6}, P(B') = \frac{1}{3}, A \cap B = \emptyset$.
- Udowodnij, że jeżeli $A, B, C \subset \Omega$ są takimi zdarzeniami, że $P(C) > 0$, to:
 - $0 \leq P(A|C) \leq 1$;
 - $P(A|C) = 1 - P(A'|C)$;
 - $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$.
- Każdy z dziesięciu uczniów losuje jedno spośród dziesięciu ponumerowanych miejsc w jednym rzędzie. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że Bartek i Tomek nie usiądą obok siebie, gdy wiemy, że Bartek wylosował miejsce z numerem 5?
- Między dwóch graczy rozdano cztery karty: asa pik, asa karo, króla kier i damę trefl. Każdy z nich otrzymał dwie karty. Po rozdaniu pierwszy gracz powiedział, że ma asa pik. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ma on również drugiego asa?

11. Wzór na prawdopodobieństwo całkowite

Niech Ω będzie danym zbiorem zdarzeń elementarnych. Zdarzenia $B_1, B_2, \dots, B_n \subset \Omega$ nazywamy **zupełnym układem zdarzeń** wtedy i tylko wtedy, gdy zawsze musi zajść **dokładnie jedno** z nich.

Oznacza to, że spełniają one następujące dwa warunki:

- $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$.
- Zdarzenia te parami wyłączają się, czyli dla każdych i, j takich, że $i \neq j$ oraz $i, j = 1, 2, \dots, n$, zachodzi równość $B_i \cap B_j = \emptyset$.

Na przykład dla dowolnego zdarzenia $B \subset \Omega$ para B i B' tworzy zupełny układ zdarzeń.

Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie (wzór na prawdopodobieństwo całkowite)

Jeżeli $B_1, B_2, \dots, B_n \subset \Omega$ są zupełnym układem zdarzeń, z których każde ma prawdopodobieństwo dodatnie, to prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ wyraża wzór:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n).$$

□ Dowód. Z założenia mamy $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$. Korzystając z praw działań na zdarzeniach, otrzymujemy więc dla dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$:

$$A = A \cap \Omega = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n).$$

Ponieważ każde dwa zdarzenia spośród zdarzeń B_1, B_2, \dots, B_n wyłączają się, więc wyłączają się również każde dwa zdarzenia spośród zdarzeń $A \cap B_1, A \cap B_2, \dots, A \cap B_n$. Wiemy też, że prawdopodobieństwo sumy takich zdarzeń równe jest sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń, stąd $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)$. Ale:

$$P(A \cap B_i) = P(A|B_i) \cdot P(B_i) \text{ dla każdego } i = 1, 2, 3, \dots, n. \text{ Zatem:}$$

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n). \quad \square$$

Przykład 1. Z urny zawierającej trzy kule czarne i dwie kule białe losujemy kulę, po czym zwracamy ją do urny i dorzucamy jeszcze dwie kule tego samego koloru, co kula wylosowana. Następnie ponownie losujemy kulę z urny. Jakie jest prawdopodobieństwo, że za drugim razem wylosujemy kulę czarną?

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez B_1 i B_2 odpowiednio zdarzenia:

- „za pierwszym razem wylosowano kulę czarną”,
- „za pierwszym razem wylosowano kulę białą”.

Zdarzenia te wyłączają się oraz ich alternatywa jest zdarzeniem pewnym. Stanowią więc zupełny układ zdarzeń. Ponadto ich prawdopodobieństwa są dodatnie, gdyż $P(B_1) = \frac{3}{5}$, $P(B_2) = \frac{2}{5}$. Zatem zdarzenia B_1 i B_2 spełniają założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.

Niech A będzie zdarzeniem, że za drugim razem wylosowaliśmy kulę czarną.

Jeżeli w pierwszym losowaniu wyciągnęliśmy kulę czarną, to za drugim razem kulę czarną losowaliśmy spośród pięciu kul czarnych i dwóch białych, więc $P(A|B_1) = \frac{5}{7}$. Gdy zaś najpierw wylosowaliśmy kulę białą, to za drugim razem kulę czarną losowaliśmy spośród trzech kul czarnych i czterech kul białych, zatem $P(A|B_2) = \frac{3}{7}$. Stąd na mocy twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5}.$$

Odpowiedź: Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{3}{5}$.

Przykład 2. Przez miejscowość N przejeżdża 4 razy więcej samochodów osobowych niż ciężarowych. Wiadomo, że 1 na 75 przejeżdżających samochodów osobowych i 1 na 25 samochodów ciężarowych tankuje w miejscowości N paliwo. Oblicz prawdopodobieństwo, że przejeżdżający przez miejscowość N samochód zatankuje paliwo.

Rozwiązanie:

Niech B_1 i B_2 oznaczają odpowiednio zdarzenia:

- „przejeżdżający przez miejscowość N samochód jest osobowy”,
- „przejeżdżający przez miejscowość N samochód jest ciężarowy”.

Zdarzenia te tworzą zupełny układ zdarzeń. Ponadto z treści zadania wynika, że $P(B_1) = \frac{4}{5}$, $P(B_2) = \frac{1}{5}$. Jeśli przez A oznaczymy zdarzenie, że przejeżdżający przez miejscowość N samochód zatankuje paliwo, wówczas:

$$P(A|B_1) = \frac{1}{75}, P(A|B_2) = \frac{1}{25}.$$

Zatem ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite otrzymujemy:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) = \frac{1}{75} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{375}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zatankowania przez przejeżdżający samochód wynosi $\frac{7}{375}$.

Przykład 3. Do hurtowni dostarczono sery pochodzące z trzech mleczarni: A , B i C . Zakład A dostarczył 3000 sztuk, zakład B – 2500 sztuk, a zakład C – 1500 sztuk. Wiadomo, że zakład A produkuje (i dostarcza) tyle samo serów pełnotłustych, co pozostałych, B – trzy razy więcej serów pełnotłustych niż pozostałych, zaś C – 4 razy więcej pełnotłustych niż pozostałych. Jakie jest prawdopodobieństwo wybrania z partii serów, dostarczonych do hurtowni przez te mleczarnie, jednej sztuki sera pełnotłustego?

Rozwiązanie:

Z treści zadania wynika, że zakłady te dostarczyły odpowiednio 1500, 1875 i 1200 sztuk serów pełnotłustych. Niech B_1 , B_2 i B_3 oznaczają odpowiednio zdarzenia:

- „wybrana sztuka sera pochodzi z mleczarni A ”,
- „wybrana sztuka sera pochodzi z mleczarni B ”,
- „wybrana sztuka sera pochodzi z mleczarni C ”.

Zdarzenia te tworzą zupełny układ zdarzeń, a ponadto ich prawdopodobieństwa są dodatnie, gdyż wynoszą: $P(B_1) = \frac{3}{7}$, $P(B_2) = \frac{5}{14}$, $P(B_3) = \frac{3}{14}$. Jeśli przez E oznaczymy zdarzenie, że wybrano sztukę sera pełnotłustego, to: $P(E|B_1) = \frac{1}{2}$, $P(E|B_2) = \frac{3}{4}$, $P(E|B_3) = \frac{4}{5}$.

Zatem ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite otrzymujemy:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E|B_1) \cdot P(B_1) + P(E|B_2) \cdot P(B_2) + P(E|B_3) \cdot P(B_3) = \\ &= \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{14} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{14} \cdot \frac{4}{5} = \frac{183}{280}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wybrania sera pełnotłustego wynosi $\frac{183}{280}$.



Pytania i zadania

1. Co to jest zupełny układ zdarzeń?
2. Sformułuj twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.
3. W urnie znajdują się cztery kule białe i trzy czarne. Wyciągamy jedną kulę i nie oglądając jej, wyciągamy spośród pozostałych kul dwie następne. Jakie jest prawdopodobieństwo, że obie kule wyciągnięte za drugim razem będą białe?
4. Z urny zawierającej pięć kul białych i cztery czarne wylosowano jedną kulę. Następnie z pozostałych kul wylosowano jeszcze dwie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że obie kule wylosowane za drugim razem okażą się tego samego koloru?
5. Mamy dwie urny: w jednej z nich są trzy kule białe i dwie czarne, a w drugiej jest jedna kula biała i cztery czarne. Z losowo wybranej urny wyciągamy na chybił trafił jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągniemy kulę białą, jeżeli prawdopodobieństwo wyboru każdej z urn jest równe 0,5?
6. Mamy dwie urny: w jednej są cztery kule białe i cztery czarne, a w drugiej – pięć białych i siedem czarnych. Rzucamy kostką sześcienną do gry. Jeżeli wypadnie mniej niż 5 oczek, to losujemy kulę z pierwszej urny, jeżeli wypadnie 5 lub 6 oczek, to losujemy kulę z drugiej urny. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania w ten sposób kuli białej.
7. Wybieramy losowo liczbę naturalną spośród liczb od 1 do n , a następnie rzucamy sześcienną kostką do gry taką liczbę razy, jaką wylosowaliśmy. Oblicz prawdopodobieństwo, że wyrzucimy same szóstki.
8. Dane są trzy urny. W pierwszej z nich jest pięć kul białych i siedem czarnych, w drugiej – sześć kul białych i pięć czarnych, a w trzeciej – dwie kule białe i pięć czarnych. Losujemy jedną kulę z pierwszej urny. Jeśli jest to kula biała, to za drugim razem losujemy kulę z urny drugiej, jeśli czarna – to z trzeciej urny. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej w drugim losowaniu.
9. Pewna roztargniona sekretarka napisała n listów ($n \geq 2$) różnej treści do różnych adresatów. Następnie adresowała kolejne koperty, wkładając do nich na chybił trafił po jednym liście. Wyznacz prawdopodobieństwo tego, że żaden z dwóch wyróżnionych adresatów nie otrzyma właściwego listu.
10. Z urny zawierającej trzy kule białe i siedem czarnych losujemy jedną i bez sprawdzania koloru wkładamy ją do urny zawierającej cztery kule białe i pięć czarnych. Następnie losujemy kulę z drugiej urny. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej.
11. Zakłady A, B, C dają odpowiednio 25%, 35% i 40% ogólnej produkcji pewnego przedsiębiorstwa, przy czym wyroby tych zakładów zawierają odpowiednio 5%, 3% i 2% braków. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany produkt jest dobry.
12. W każdej z trzech urn znajduje się jedna kula czarna i dwie białe. Z pierwszej urny przełożono losowo wybraną kulę do drugiej urny, a z niej losowo wybraną kulę do trzeciej urny. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej z trzeciej urny.

12. Niezależność pary zdarzeń

Intuicyjnie dwa zdarzenia zgodnie uznajemy za niezależne wtedy, gdy zajście jednego z nich nie ma żadnego wpływu na wynik drugiego. Prześledźmy na przykładach własności takich zdarzeń.

Przykład 1. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Mamy tutaj 36 jednakowo prawdopodobnych zdarzeń elementarnych postaci:

$\omega = (k, l)$, gdzie k jest wynikiem pierwszego, zaś l – drugiego rzutu ($k, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

Zdarzenia: A – „za pierwszym razem wypadła parzysta liczba oczek” i B – „za drugim razem wypadła nieparzysta liczba oczek” możemy nazwać niezależnymi. Zdarzeniu A sprzyjają zdarzenia elementarne: $(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)$, zaś zdarzeniu B – zdarzenia elementarne: $(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5)$. Wobec tego $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. Z kolei zdarzeniu $A \cap B$ sprzyjają zdarzenia elementarne: $(2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (6, 1), (6, 3), (6, 5)$, więc $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$. Zatem prawdopodobieństwo koniunkcji zdarzeń A i B jest iloczynem prawdopodobieństw tych zdarzeń.

Przykład 2. Rzucamy dwa razy monetą symetryczną. Są tutaj cztery jednakowo prawdopodobne zdarzenia elementarne $\omega = (m, n)$, gdzie m jest wynikiem pierwszego rzutu, zaś n – drugiego rzutu ($m, n = O$ lub R). Zdarzenia: A – „za pierwszym razem wypadła reszka”, B – „za drugim razem wypadł orzeł” są oczywiście zdarzeniami niezależnymi, w potocznym rozumieniu tego słowa. Zdarzeniu A sprzyjają zdarzenia elementarne: $(R, O), (R, R)$, a zdarzeniu B – zdarzenia: $(R, O), (O, O)$, natomiast zdarzeniu $A \cap B$ – zdarzenie elementarne (R, O) . Zatem $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, zaś $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Tak więc i tym razem zachodzi równość: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Przykład 3. Spośród liczb naturalnych od 1 do 20 losujemy jedną. Niech A i B będą odpowiednio zdarzeniami: „wylosowana liczba jest podzielna przez 4” i „wylosowana liczba jest podzielna przez 6”. Ponieważ wśród danych liczb występuje liczba podzielna zarówno przez 4, jak i przez 6, więc domyślamy się, że zdarzenia te nie są niezależne. Nie jest to oczywiście dziełem przypadku, gdyż liczby 4 i 6 nie są względnie pierwsze.

Zobaczymy, czy i tym razem otrzymamy związek, który występował w poprzednich przykładach. Zdarzeniu A sprzyjają liczby: 4, 8, 12, 16, 20, zdarzeniu B – liczby 6, 12, 18, zaś zdarzeniu $A \cap B$ sprzyja jedynie liczba 12. Wobec tego: $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{3}{20}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$. Zatem $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$.

Przejdźmy teraz do rozważań ogólniejszych.

Niech Ω będzie dowolnym zbiorem zdarzeń elementarnych, P – prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach w tym zbiorze, zaś $B \subset \Omega$ – takim zdarzeniem, że $P(B) > 0$. Zdarzenie $A \subset \Omega$ nazwiemy niezależnym od zdarzenia B , jeśli zajście zdarzenia B nie zmieni prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia A , czyli gdy $P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, a więc gdy $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$.

Na odwrót, jeśli $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, czyli gdy $P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B)$, to powiemy, że zdarzenie A nie zależy od zdarzenia B .

Możemy zatem przyjąć następującą definicję niezależności pary zdarzeń A i B :

Parę zdarzeń A i B ($A, B \subset \Omega$) nazywamy **niezależnymi** wtedy i tylko wtedy, gdy spełniają warunek:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Zdarzenia, które nie są niezależne, będziemy określać mianem zdarzeń **zależnych**.

Zdarzenia A i B rozpatrywane w przykładach 1. i 2. stanowią więc parę zdarzeń niezależnych w myśl podanej definicji, natomiast zdarzenia A i B z przykładu 3. są według niej zdarzeniami zależnymi.

Oto jeszcze dwa przykłady pary zdarzeń zależnych:

Przykład 4. Z urny zawierającej 5 kul, w tym 3 białe i 2 czarne, wyjmujemy losowo jedną kulę i zatrzymujemy ją, po czym sięgamy po następną. Niech A i B będą odpowiednio zdarzeniami: „wylosowana za pierwszym razem kula jest biała”, „wylosowana za drugim razem kula jest czarna”. Intuicja podpowiada nam, że zdarzenia te nie są niezależne. Sprawdźmy więc, czy i tym razem otrzymaliśmy związek, który występował w przykładzie 3.

Przyjmując za zbiór Ω zdarzeń elementarnych zbiór wszystkich uporządkowanych par: $(k_1; k_2)$, gdzie k_i – oznacza kulę wylosowaną za i -tym razem ($i = 1, 2$), przy czym $k_1 \neq k_2$, obliczamy, że $|\Omega| = 5 \cdot 4 = 20$ (tyle, ile dwuwyzrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru pięcioelementowego).

Ponieważ zdarzeniu A sprzyjają pary: (biała kula; którakolwiek kula z pozostałych), zdarzeniu B – pary: (kotrakolwiek kula; czarna kula niewylosowana za pierwszym razem), zaś zdarzeniu $A \cap B$ – pary: (biała kula; czarna kula), więc łatwo obliczymy, że:

$$|A| = 3 \cdot 4 = 12, |B| = 2 \cdot 4 = 8, |A \cap B| = 3 \cdot 2 = 6.$$

Wobec tego: $P(A) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$, $P(A \cap B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$. Widzimy zatem, że $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$.

Przykład 5. Niech $A \subset \Omega$ będzie zdarzeniem, które nie jest niemożliwe i nie jest zdarzeniem pewnym – a więc takim, że $0 < P(A) < 1$. Zdarzenie A i zdarzenie A' (przeciwnie do zdarzenia A) stanowią parę zdarzeń zależnych. Jeśli bowiem zaszło zdarzenie A' , to zdarzenie A nie może zajść. Co więcej, zdarzenia A i A' wyłączają się, czyli $A \cap A' = \emptyset$. Zatem $P(A \cap A') = P(\emptyset) = 0 \neq P(A)(1 - P(A)) = P(A) \cdot P(A')$. Widzimy więc, że zdarzenia te nie spełniają warunku niezależności zdarzeń.

Pytania i zadania

1. Podaj definicję niezależności pary zdarzeń.
2. Czy zdarzenia niezależne mogą się wyłączać?
3. Jakie dwa zdarzenia nazywamy zdarzeniami zależnymi?
4. Z talii 52 kart losujemy jedną kartę. Czy zdarzenia: A – „wylosowana karta jest treflem”, B – „wylosowana karta jest asem” są niezależne? Odpowiedź uzasadnij.
5. Rzucamy raz symetryczną kostką do gry. Czy zdarzenia: A – „wypadła parzysta liczba oczek”, B – „wypadła liczba oczek większa od 3” są niezależne? Odpowiedź uzasadnij.

6. Pan Kowalski ma dwoje dzieci. Czy zdarzenia: A – „Pan Kowalski ma dzieci obojga płci”, B – „Pan Kowalski ma co najwyżej jednego chłopca” są niezależne? Odpowiedź uzasadnij.
7. Czy zdarzenia A i B spełniające warunki: $P(A \cup B) = 0,9$, $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,8$ są niezależne? Uzasadnij swoją odpowiedź.
8. Udowodnij, że zdarzeniami niezależnymi są:
a) zdarzenie pewne i dowolne zdarzenie;
b) zdarzenie niemożliwe i dowolne zdarzenie.
9. Wykaż, że jeżeli zdarzenia A i B nie są niemożliwe i wyłączają się, to są zależne.
- 10*. Udowodnij, że jeżeli zdarzenia A i B są niezależne, to niezależne są także zdarzenia:
a) A' i B ;
b) A i B' ;
c) A' i B' .
- 11**. Udowodnij, że jeżeli zdarzenia A i B spełniają warunki: $P(B) > 0$, $P(B') > 0$ i $P(A|B) = P(A|B')$, to są niezależne.
12. Wykaż, że jeżeli zdarzenia A i B wyłączają się, to są one niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $P(A) = 0$ lub $P(B) = 0$.

13. Niezależność n zdarzeń ($n \geq 3$)

Określimy teraz niezależność większej liczby zdarzeń.

Zdarzenia A, B, C ($A, B, C \subset \Omega$) nazywamy **niezależnymi** wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą równości:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B), \quad P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C), \quad P(C \cap A) = P(C) \cdot P(A)$$

oraz $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

Z podanej definicji wynika, że jeżeli zdarzenia A, B, C są niezależne, to każde dwa z nich też są niezależne, lecz nie na odwrót, z niezależności każdych dwóch zdarzeń spośród zdarzeń A, B, C nie wynika niezależność wszystkich trzech.

Przykład 1. Spośród liczb: 222, 112, 121, 211 wyciągamy losowo jedną (każdą z tym samym prawdopodobieństwem). Rozważmy zdarzenia:

A – „cyfra jedności wylosowanej liczby jest nieparzysta”,

B – „cyfra dziesiątek wylosowanej liczby jest nieparzysta”,

C – „cyfra setek wylosowanej liczby jest nieparzysta”.

Ponieważ $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$ oraz $P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(C \cap A) = \frac{1}{4}$, więc rzeczywiście:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B), \quad P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C), \quad P(C \cap A) = P(C) \cdot P(A),$$

co oznacza, że każde dwa spośród rozważanych zdarzeń są niezależne.

Tymczasem $A \cap B \cap C = \emptyset$, więc $P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

Na tej podstawie możemy sformułować definicję:

Zdarzenia A_1, A_2, \dots, A_n ($A_i \subset \Omega, i = 1, 2, \dots, n$) nazywamy **niezależnymi**, gdy prawdopodobieństwo koniunktji dowolnych k zdarzeń spośród nich, gdzie $2 \leq k \leq n$, jest iloczynem ich prawdopodobieństw.

Przykład 2. Rzucamy n razy kostką sześcienną do gry, obserwując liczbę oczek wyrzucanych w kolejnych rzutach.

Zdarzeniami elementarnymi są tutaj wszystkie n -wyrazowe ciągi o wyrazach 1, 2, 3, 4, 5, 6. Tak więc:

$$\Omega = \{ \omega = (k_1, k_2, \dots, k_n); k_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, i = 1, 2, \dots, n \};$$

$$|\Omega| = W_6^n = 6^n.$$

Ponieważ każde zdarzenie elementarne jest jednakowo prawdopodobne, więc:

$$P(\{ \omega \}) = \frac{1}{6^n}.$$

Niech A_i oznacza zdarzenie: „w i -tym rzucie wypadła parzysta liczba oczek”. Zdarzeniu A_i sprzyjają więc te ciągi n -wyrazowe, których i -tymi wyrazami są: 2, 4 lub 6, a pozostałymi – którekolwiek liczby od 1 do 6. Zatem:

$$|A_i| = 3 \cdot W_6^{n-1} = 3 \cdot 6^{n-1} \text{ i wobec tego } P(A_i) = \frac{3 \cdot 6^{n-1}}{6^n} = \frac{1}{2}.$$

Spośród zdarzeń A_1, A_2, \dots, A_n rozważmy dowolnych m zdarzeń $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}$, gdzie $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$. Zdarzeniu $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}$ sprzyjają te ciągi n -wyrazowe, których wyrazy o numerach i_1, i_2, \dots, i_m są jedną z liczb 2, 4 lub 6, a pozostałe wyrazy (jest ich $n-m$) – którekolwiek z liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6. Tak więc:

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}| = W_3^m \cdot W_6^{n-m} = 3^m \cdot 6^{n-m}$$

i wobec tego:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}) = \frac{3^m \cdot 6^{n-m}}{6^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^m = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2}}_m = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_m}),$$

co dowodzi, w myśl podanej definicji, że zdarzenia A_1, A_2, \dots, A_n są niezależne.

Pytania i zadania

- Podaj definicję niezależności:
 - trzech zdarzeń,
 - czterech zdarzeń,
 - n zdarzeń.
- Rzucamy n razy monetą symetryczną. Niech A_k będzie zdarzeniem, że w k -tym rzucie wypadła reszka ($k = 1, 2, \dots, n$). Udowodnij, że zdarzenia A_1, A_2, \dots, A_n są niezależne.

3. Rzucamy n razy kostką do gry. Niech A_k oznacza zdarzenie:
- „w k -tym rzucie wypadła szóstka”;
 - „w k -tym rzucie wypadły nie mniej niż cztery oczka”.
- Wykaż, że zdarzenia $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ są niezależne.
4. Zdarzenia A, B, C są niezależne oraz $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$. Czy zdarzenia te mogą parami wyłączać się?
5. Udowodnij, że jeżeli zdarzenia A, B, C są niezależne, to zdarzenia $A \cup B$ i C są także niezależne.
- 6*. Trzy zdarzenia spełniają warunki:
- ich prawdopodobieństwa są równe,
 - są parami niezależne,
 - nie zachodzą równocześnie.
- Wyznacz największą wartość prawdopodobieństwa każdego z tych zdarzeń.
7. W serii n strzałów oddanych niezależnie od siebie prawdopodobieństwa chybienia celu w kolejnych strzałach wynoszą odpowiednio: $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{(n+1)^2}$. Wykaż, że prawdopodobieństwo oddania serii n strzałów celnych wynosi $\frac{n+2}{2(n+1)}$.
- 8**. Zdarzenia A, B, C spełniają warunki:
- $P(A) > 0, P(B) > 0, P(C) > 0$,
 - $P(A \cap (B \cap C)) = P(A) \cdot P(B \cap C)$,
 - $P(A \cap (B \cup C)) = P(A) \cdot P(B \cup C)$,
 - $P(B \cap (A \cap C)) = P(B) \cdot P(A \cap C)$,
 - $P(C \cap (A \cap B)) = P(C) \cdot P(A \cap B)$.
- Udowodnij, że zdarzenia A, B, C są niezależne.

14. Zbiór zdarzeń elementarnych dla doświadczeń przebiegających niezależnie od siebie

Rozważmy ciąg kilku doświadczeń losowych. Będziemy je nazywać próbami niezależnymi, gdy wynik każdego z nich nie będzie zależał od wyników pozostałych.

I. Dwie próby niezależne D_1 i D_2 (np. D_1 – rzut kostką, D_2 – rzut monetą).

Niech $\Omega_1 = \{\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_n\}$ i $\Omega_2 = \{\omega''_1, \omega''_2, \dots, \omega''_m\}$ będą zbiorami zdarzeń elementarnych odpowiednio dla D_1 i D_2 , zaś P_1 i P_2 niech będą prawdopodobieństwami określonymi na zdarzeniach odpowiednio w zbiorach Ω_1 i Ω_2 .

Potraktujmy te dwie próby jako jedno doświadczenie D , polegające na wykonaniu kolejno prób D_1 i D_2 . Dla tak określonego nowego doświadczenia D za zbiór zdarzeń elementarnych Ω przyjmijmy zbiór wszystkich par $\omega = (\omega'_j, \omega''_k)$, gdzie $\omega'_j \in \Omega_1$, $\omega''_k \in \Omega_2$, $j = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, 3, \dots, m$:

$$\Omega = \left\{ \omega = (\omega'_j, \omega''_k), j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m \right\},$$

gdzie ω'_j i ω''_k są wynikami doświadczeń odpowiednio D_1 i D_2 .

Ponieważ próby D_1 i D_2 przebiegały niezależnie jedna od drugiej (w potocznym rozumieniu tego słowa), więc na zdarzeniach w zbiorze Ω należy określić prawdopodobieństwo P tak, aby każde dwa zdarzenia postaci:

A – „w doświadczeniu D_1 zaszło zdarzenie A_1 ”,

B – „w doświadczeniu D_2 zaszło zdarzenie B_2 ”

($A_1 \subset \Omega_1$, $B_2 \subset \Omega_2$) były niezależne i aby $P(A) = P_1(A_1)$ i $P(B) = P_2(B_2)$.

Zdarzenia A , B i $A \cap B$ zapiszemy za pomocą symboli matematycznych następująco:

$$A = \left\{ \omega = (\omega'_j; \omega''_k); \omega'_j \in A_1 \right\}, \quad B = \left\{ \omega = (\omega'_j; \omega''_k); \omega''_k \in B_2 \right\},$$

$$A \cap B = \left\{ \omega = (\omega'_j; \omega''_k); \omega'_j \in A_1 \text{ i } \omega''_k \in B_2 \right\}.$$

Prawdopodobieństwo P określone na zdarzeniach w zbiorze Ω winno zatem spełniać warunki:

$$1. P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

$$2. P(A) = P_1(A_1), P(B) = P_2(B_2)$$

dla dowolnych zdarzeń $A_1 \subset \Omega_1$ i $B_2 \subset \Omega_2$.

Warunki te są podstawą twierdzenia:

Twierdzenie

Prawdopodobieństwo P określone na zdarzeniach w zbiorze Ω spełnia warunki 1. i 2. wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zdarzenia elementarnego $\omega = (\omega'_j, \omega''_k)$ zachodzi równość

$$P(\{(\omega'_j, \omega''_k)\}) = P_1(\{\omega'_j\}) \cdot P_2(\{\omega''_k\}).$$

Dowód pomijamy.

Przykład 1. Pewna winda ma dwa różne i niezależnie pracujące systemy hamowania. W razie zerwania się liny pierwszy system zatrzymuje windę z prawdopodobieństwem 0,995, a drugi – z prawdopodobieństwem 0,998. Oblicz prawdopodobieństwo, że w razie zerwania się liny winda zostanie wyhamowana.

Rozwiązanie:

Wyhamowanie windy oznaczmy liczbą 1, a niewyhamowanie – liczbą 0. Niezależnymi próbami D_1 i D_2 są tutaj: praca systemu pierwszego i praca systemu drugiego.

Z treści zadania wynika, że $\Omega_1 = \Omega_2 = \{0, 1\}$, zaś prawdopodobieństwa P_1 i P_2 są określone na zdarzeniach odpowiednio w zbiorach Ω_1 i Ω_2 następująco:

$$P_1(\{1\}) = 0,995, P_1(\{0\}) = 0,005; \quad P_2(\{1\}) = 0,998, P_2(\{0\}) = 0,002.$$

Praca obydwu systemów hamowania tej windy jest doświadczeniem D , w którym zbiorem zdarzeń elementarnych jest zbiór $\Omega = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$. Wobec niezależności pracy obu systemów prawdopodobieństwo P jest określone następująco:

$$P(\{(0, 0)\}) = P_1(\{0\}) \cdot P_2(\{0\}) = 0,005 \cdot 0,002 = 10^{-5},$$

$$P(\{(0, 1)\}) = P_1(\{0\}) \cdot P_2(\{1\}) = 0,005 \cdot 0,998 = 0,00499,$$

$$P(\{(1, 0)\}) = P_1(\{1\}) \cdot P_2(\{0\}) = 0,995 \cdot 0,002 = 0,00199,$$

$$P(\{(1, 1)\}) = P_1(\{1\}) \cdot P_2(\{1\}) = 0,995 \cdot 0,998 = 0,99301.$$

Zdarzenie, że winda zostanie wyhamowana, oznaczmy przez A . Jest ono zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia, że winda nie zostanie wyhamowana: $A' = \{(0, 0)\}$. Wobec tego poszukiwane prawdopodobieństwo:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - P(\{(0, 0)\}) = 1 - 10^{-5} = 0,99999.$$

II. Trzy próby niezależne D_1, D_2 i D_3 (np. D_1 – rzut kostką, D_2 – rzut monetą, D_3 – rzut lotką do tarczy).

Niech $\Omega_1 = \{\omega_1', \omega_2', \dots, \omega_m'\}$, $\Omega_2 = \{\omega_1'', \omega_2'', \dots, \omega_n''\}$, $\Omega_3 = \{\omega_1''', \omega_2''', \dots, \omega_k'''\}$ będą zbiorami zdarzeń elementarnych odpowiednio dla D_1, D_2 i D_3 , zaś P_1, P_2, P_3 – prawdopodobieństwami określonymi na zdarzeniach w tych zbiorach.

Traktując te trzy próby jako jedno nowe doświadczenie D polegające na wykonaniu kolejno prób D_1, D_2 i D_3 , otrzymamy w nim zbiór zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega = (\omega_i', \omega_j'', \omega_l'''); \omega_i' \in \Omega_1, \omega_j'' \in \Omega_2, \omega_l''' \in \Omega_3\}$, gdzie $\omega_i', \omega_j'', \omega_l'''$ są wynikami odpowiednio doświadczeń D_1, D_2 i D_3 .

Ponieważ próby D_1, D_2 i D_3 przebiegają niezależnie od siebie (w sensie potocznym), więc prawdopodobieństwo P na zdarzeniach w zbiorze Ω musimy określić tak, aby każde trzy zdarzenia postaci:

A – „w doświadczeniu D_1 zaszło zdarzenie A_1 ”,

B – „w doświadczeniu D_2 zaszło zdarzenie B_2 ”,

C – „w doświadczeniu D_3 zaszło zdarzenie C_3 ”

($A_1 \subset \Omega_1, B_2 \subset \Omega_2, C_3 \subset \Omega_3$) były niezależne i aby $P(A) = P_1(A_1), P(B) = P_2(B_2)$ i $P(C) = P_3(C_3)$.

Prawdopodobieństwo P winno zatem spełniać następujące warunki:

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B), P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C), P(C \cap A) = P(C) \cdot P(A),$
 $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C);$
- $P(A) = P_1(A_1), P(B) = P_2(B_2), P(C) = P_3(C_3)$ dla dowolnych zdarzeń $A_1 \subset \Omega_1, B_2 \subset \Omega_2,$
 $C_3 \subset \Omega_3.$

Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Prawdopodobieństwo P określone na zdarzeniach w zbiorze Ω spełnia podane warunki 1. i 2. wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zdarzenia elementarnego $\omega = (\omega_i', \omega_j'', \omega_k''')$ zachodzi równość:

$$P\left(\left\{(\omega_i', \omega_j'', \omega_k''')\right\}\right) = P_1\left(\left\{\omega_i'\right\}\right) \cdot P_2\left(\left\{\omega_j''\right\}\right) \cdot P_3\left(\left\{\omega_k'''\right\}\right).$$

Dowód pomijamy.

Podobne rozważania możemy przeprowadzić dla dowolnej, skończonej liczby prób niezależnych.

Przykład 2. Trzej bracia: Bartek, Maciek i Tomek oddają jednocześnie po jednym strzale do tej samej tarczy. Bartek trafia z prawdopodobieństwem 0,6, Maciek – z prawdopodobieństwem 0,8, a Tomek – z prawdopodobieństwem 0,9. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że tarcza zostanie dokładnie dwa razy trafiona.

Rozwiązanie:

Trafienie oznaczmy liczbą 1, nietrafienie zaś, zwane pudłem – liczbą 0. Niezależnymi próbami D_1, D_2 i D_3 są tutaj: strzały Bartka, strzały Maćka i strzały Tomka.

Z treści zadania wynika, że zbiorami zdarzeń elementarnych dla tych prób są zbiory: $\Omega_1 = \{0, 1\}$, $\Omega_2 = \{0, 1\}$ i $\Omega_3 = \{0, 1\}$, a prawdopodobieństwa odpowiednio P_1, P_2 i P_3 są określone na zdarzeniach w tych zbiorach następująco:

$$P_1(\{1\}) = 0,6, \quad P_1(\{0\}) = 0,4,$$

$$P_2(\{1\}) = 0,8, \quad P_2(\{0\}) = 0,2,$$

$$P_3(\{1\}) = 0,9, \quad P_3(\{0\}) = 0,1.$$

Strzały całej trójki braci to doświadczenie D , w którym zbiorem zdarzeń elementarnych jest zbiór $\Omega = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$, gdzie w każdej z występujących tu trójek pierwsza cyfra opisuje wynik strzału oddanego przez Bartka, druga – wynik strzału Maćka, a trzecia – wynik strzału Tomka.

Wobec niezależności strzałów każdego z trzech braci prawdopodobieństwo P jest określone następująco:

$$P(\{(0, 0, 0)\}) = P_1(\{0\}) \cdot P_2(\{0\}) \cdot P_3(\{0\}) = 0,4 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,008,$$

$$P(\{(0, 0, 1)\}) = P_1(\{0\}) \cdot P_2(\{0\}) \cdot P_3(\{1\}) = 0,4 \cdot 0,2 \cdot 0,9 = 0,072,$$

$$P(\{(0, 1, 0)\}) = P_1(\{0\}) \cdot P_2(\{1\}) \cdot P_3(\{0\}) = 0,4 \cdot 0,8 \cdot 0,1 = 0,032,$$

$$P(\{(1, 0, 0)\}) = P_1(\{1\}) \cdot P_2(\{0\}) \cdot P_3(\{0\}) = 0,6 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,012,$$

$$P(\{(1, 1, 0)\}) = P_1(\{1\}) \cdot P_2(\{1\}) \cdot P_3(\{0\}) = 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,1 = 0,048,$$

$$P(\{(0, 1, 1)\}) = P_1(\{0\}) \cdot P_2(\{1\}) \cdot P_3(\{1\}) = 0,4 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,288,$$

$$P(\{(1, 0, 1)\}) = P_1(\{1\}) \cdot P_2(\{0\}) \cdot P_3(\{1\}) = 0,6 \cdot 0,2 \cdot 0,9 = 0,108,$$

$$P(\{(1, 1, 1)\}) = P_1(\{1\}) \cdot P_2(\{1\}) \cdot P_3(\{1\}) = 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,432.$$

Zdarzeniu A , polegającemu na tym, że tarcza zostanie trafiona dokładnie dwa razy, sprzyjają zdarzenia elementarne: $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ i $(0, 1, 1)$. Zatem poszukiwane prawdopodobieństwo:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{(1, 1, 0)\}) + P(\{(1, 0, 1)\}) + P(\{(0, 1, 1)\}) = \\ &= 0,048 + 0,288 + 0,108 = 0,444. \end{aligned}$$

Pytania i zadania



- Mamy dwie torby orzechów: w jednej są orzechy laskowe, w drugiej – włoskie. Wyjmujemy jeden orzech laskowy i dwa włoskie. Prawdopodobieństwo, że wyjęty orzech laskowy okaże się pusty, wynosi 0,125, zaś że wyjęty orzech włoski okaże się pusty – wynosi 0,1. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wyjmujemy choć jeden orzech pełny?
- Dwaj strzelcy trafiają do tej samej tarczy z prawdopodobieństwami odpowiednio 0,83 i 0,87. Strzelcy ci oddali po jednym strzale niezależnie od siebie. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
 - oddane zostały dwa strzały celne;
 - oddany został co najmniej jeden strzał celny;
 - nie oddano ani jednego celnego strzału.
- Na odcinku drogi ustalonej długości samochód przejeżdża przez trzy skrzyżowania z sygnalizacją świetlną niesynchronizowaną. Zdarzenia polegające na niezatrzymaniu się na poszczególnych skrzyżowaniach są niezależne od siebie i ich prawdopodobieństwa wynoszą odpowiednio: $p_1 = 0,6$, $p_2 = 0,5$, $p_3 = 0,6$. Oblicz prawdopodobieństwo przejechania przez te trzy skrzyżowania bez zatrzymania się.
- Dwa agregaty prądowłórcze pracują niezależnie od siebie. Prawdopodobieństwo wystąpienia awarii w pewnym okresie T u pierwszego z nich wynosi 0,2, a u drugiego z nich 0,3. Oblicz prawdopodobieństwo wystąpienia awarii w tym okresie w obu agregatach jednocześnie.
- Robotnik obsługuje trzy maszyny. Prawdopodobieństwo tego, że w pewnym czasie maszyny nie wymagają obsługi wynosi: 0,9 dla pierwszej, 0,8 dla drugiej i 0,85 dla trzeciej. Maszyny te pracują niezależnie od siebie. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w pewnym czasie:
 - żadna z maszyn nie wymaga obsługi;
 - wszystkie maszyny wymagają obsługi.

6. Turysta chce rozpalic ognisko, majac jedynie dwie zapalki i wiedzac, ze w danych warunkach prawdopodobienstwo rozpalenia ogniska kazda z nich jest rowne 0,6, a natomiast prawdopodobienstwo rozpalenia ogniska dwiema zlaczonymi zapalkami jest rowne 0,85. Ktory z tych dwuch sposobow daje turyście wieksze szanse na rozpalenie ogniska?
7. Trzech zawodnikow oddalo po jednym strzale rownoczesnie do tej samej tarczy. Strzelali oni niezaleznie od siebie. Prawdopodobienstwa trafienia w jednym strzale dla tych zawodnikow sa rowne odpowiednio: 0,1, 0,2 i 0,5. Jakie jest prawdopodobienstwo co najmniej jednego trafienia?

15. Schemat Bernoulliego

Kazde doswiadczenie losowe, ktore moze zakonczyc sie tylko dwoma wynikami, okreslamy mianem **próby Bernoulliego** (czytaj: Bernuliego). Jeden z tych wynikow nazywamy umownie **sukcesem**, a drugi – **porazka**.

Przyklady prób Bernoulliego:

- rzut monetą symetryczną; jeśli wypadnięcie orła uznamy za sukces, to wypadnięcie reszki oznaczać będzie porażkę;
- rzut sześcienną kostką do gry; za sukces możemy przyjąć wypadnięcie parzystej liczby oczek, a za porażkę – wypadnięcie nieparzystej liczby oczek;
- strzelanie do tarczy; sukcesem tutaj będzie trafienie do tarczy, zaś porażką – spudłowanie;
- wyciąganie jednej karty z talii 52 kart do gry; za sukces możemy uznać wyciągnięcie asa, za porażkę – wyciągnięcie dowolnej innej karty.

Próbę Bernoulliego możemy powtarzać wiele razy. Powtórzenia próby nazwiemy niezależnymi, jeśli prawdopodobieństwo sukcesu w każdym z tych powtórzeń będzie takie samo.



Ciąg n niezależnych powtórzeń tej samej próby Bernoulliego nazywamy **schematem n prób Bernoulliego**.

Przykłady schematów Bernoulliego:

- n -krotny rzut monetą symetryczną;
- wielokrotne losowanie, ze zwrotem po każdym losowaniu, kuli z urny zawierającej różnialne kule, na przykład białe i czarne;
- n -krotny rzut dwiema kostkami sześciennymi do gry;
- obserwacja płci noworodków.

Sukces próby Bernoulliego oznaczać będziemy przez A , prawdopodobieństwo tego sukcesu – przez p , zaś porażkę – przez A' , a jej prawdopodobieństwo – przez q . Oczywiście wtedy $p + q = 1$, czyli $q = 1 - p$.

Jeżeli próbę Bernoulliego powtórzmy N razy, to sukces może nie pojawić się wcale bądź może pojawić się raz, dwa razy ... albo N razy (czyli w każdej próbie).

Powstaje pytanie, z jakim prawdopodobieństwem w schemacie N prób Bernoulliego sukces pojawia się k razy ($k = 0, 1, 2, \dots, N$)? Prawdopodobieństwo to oznaczać będziemy symbolem $P_N(k)$, a wzór na nie podał na początku XVIII wieku Jakub Bernoulli.

Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Prawdopodobieństwo $P_N(k)$ zdarzenia, że w schemacie N prób Bernoulliego sukces pojawia się k razy, wyraża się wzorem:

$$P_N(k) = \binom{N}{k} p^k \cdot q^{N-k} \text{ dla } k = 0, 1, 2, \dots, N,$$

gdzie p oznacza prawdopodobieństwo sukcesu, zaś q – porażki ($p + q = 1$).

□ Dowód. Zdarzeniami elementarnymi w schemacie N prób Bernoulliego są N -wyrazowe ciągi (x_1, x_2, \dots, x_N) o wyrazach równych A lub A' (sukces lub porażka).

Wobec niezależności powtórzeń próby N razy prawdopodobieństwo każdego zdarzenia elementarnego $\omega = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, w którym k wyrazów jest równych A , wynosi $p^k \cdot q^{N-k}$. Wszystkie te zdarzenia elementarne sprzyjają zdarzeniu, którego prawdopodobieństwo $P_N(k)$ chcemy wyznaczyć i jest ich tyle, ile sposobów wyboru k wyrazów spośród N wyrazów x_1, x_2, \dots, x_N , czyli $\binom{N}{k}$. Zatem poszukiwane prawdopodobieństwo $P_N(k)$ wynosi $\binom{N}{k} p^k \cdot q^{N-k}$. □

Przykład 1. Rzucamy 4 razy kostką sześcienną do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że szóstką wypadnie 2 razy?

Rozwiązanie:

Mamy tutaj schemat 4 prób Bernoulliego. Sukcesem A w jednej próbie jest wypadnięcie szóstką, więc $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$. Zgodnie z podanym wzorem otrzymujemy:

$$P_4(2) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{6^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} = \frac{25}{216}.$$

Odpowiedź: Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{25}{216}$.

Przykład 2. Co jest bardziej prawdopodobne: wygrać z równorzędnym przeciwnikiem 3 partie z 4 partii czy 5 z 8 partii?

Rozwiązanie:

W pierwszym przypadku mamy do czynienia ze schematem 4 prób, a w drugim – ze schematem 8 prób Bernoulliego. W obu przypadkach sukcesem w pojedynczej próbie jest wygrana, a porażką – przegrana.

Z treści zadania wynika, że $p = q = \frac{1}{2}$. Należy porównać liczby $P_4(3)$ i $P_8(5)$.

Obliczamy:

$$P_4(3) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4},$$

$$P_8(5) = \binom{8}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 56 \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{7}{32}.$$

Widzimy teraz, że $P_4(3) = \frac{8}{32} > \frac{7}{32} = P_8(5)$.

Odpowiedź: Bardziej prawdopodobne jest wygrać 3 partie z 4 niż 5 z 8 partii.

Przykład 3. Z urny, w której znajdują się dwie kule białe i trzy czarne, losujemy 5 razy po dwie kule, zwracając za każdym razem wylosowane dwie kule do urny. Jakie jest prawdopodobieństwo trzykrotnego wylosowania pary kul różnego koloru?

Rozwiązanie:

Doświadczenie opisane w zadaniu jest schematem 5 prób Bernoulliego. Sukcesem w pojedynczej próbie jest wylosowanie pary kul różnokolorowych i zachodzi on z prawdopodobieństwem:

$$p = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{5}.$$

Zatem poszukiwane prawdopodobieństwo $P_5(3) = \binom{5}{3} \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 0,3456$.

Odpowiedź: Parę kul różnego koloru wyciągamy trzy razy z prawdopodobieństwem 0,3456.

Przykład 4. Prawdopodobieństwo trafienia do celu jednym strzałem wynosi $\frac{3}{4}$. Do celu oddano niezależnie 6 strzałów. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że cel zostanie trafiony:

- jeden raz,
- co najmniej raz,
- co najwyżej raz.

Rozwiązanie:

Mamy tutaj do czynienia ze schematem 6 prób Bernoulliego, którego sukcesem w pojedynczej próbie jest trafienie do celu i prawdopodobieństwo sukcesu wynosi $p = \frac{3}{4}$.

Zgodnie ze wzorem na $P_N(k)$ obliczamy:

$$\text{a) } P_6(1) = \binom{6}{1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{9}{2048} = 0,0044;$$

$$\text{b) } P_6(k \geq 1) = 1 - P_6(0) = 1 - \binom{6}{0} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6 = 1 - 0,0002 = 0,9998;$$

$$\text{c) } P_6(k \leq 1) = P_6(0) + P_6(1) = 0,0002 + 0,0044 = 0,0046.$$



Pytania i zadania

- Podaj określenia:
 - próby Bernoulliego,
 - schematu Bernoulliego.
- Podaj wzór na prawdopodobieństwo k sukcesów w schemacie N prób Bernoulliego.
- Rzucamy 5 razy kostką sześcienną do gry. Oblicz prawdopodobieństwo wypadnięcia piątki co najmniej 2 razy.
- Rzucamy 9 razy monetą symetryczną. Oblicz prawdopodobieństwo wypadnięcia reszki 4, 5 lub 6 razy.
- Trzej bracia: Bartek, Maciek i Tomek losują codziennie, który z nich pojedzie rowerem do sklepu po zakupy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu najbliższych 12 dni Maciek pojedzie po zakupy do sklepu:
 - więcej niż 5 razy,
 - mniej niż 4 razy?
- W schemacie 4 prób Bernoulliego prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej jednego sukcesu wynosi $\frac{1}{2}$. Jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania sukcesu w jednej próbie?
- W zajezdni tramwajowej jest 12 tramwajów, z których każdy codziennie wyjeżdża do miasta z prawdopodobieństwem 0,8. Oblicz prawdopodobieństwo normalnej pracy zajezdni w najbliższym dniu, jeżeli normalny ruch wymaga co najmniej 8 kursujących tramwajów.
- Aby zakwalifikować się do kadry, zawodnik musi otrzymać pozytywny wynik z co najmniej czterech spośród siedmiu testów. Jeżeli będzie przygotowywał się do wszystkich testów, to prawdopodobieństwo uzyskania sukcesu w każdym z tych testów jest jednako i wynosi $\frac{1}{2}$. Jeżeli będzie przygotowywał się do pięciu testów, to odpowiednie prawdopodobieństwo odniesienia sukcesu w każdym z tych pięciu testów będzie równe $\frac{3}{4}$. Jeśli zaś będzie się przygotowywał do czterech testów, to prawdopodobieństwo odniesienia sukcesu w każdym z tych czterech testów wyniesie $\frac{4}{5}$. Który z trzech wymienionych sposobów przygotowywania się jest dla zawodnika najkorzystniejszy?

16. Najbardziej prawdopodobna liczba sukcesów w schemacie Bernoulliego

Wiemy już, że w schemacie N prób Bernoulliego sukces uzyskujemy k razy z prawdopodobieństwem:

$$(*) P_N(k) = \binom{N}{k} p^k \cdot q^{N-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, N,$$

gdzie p jest prawdopodobieństwem sukcesu w jednej próbie.

Która z liczb: $0, 1, 2, 3, \dots, N$ sukcesów w tym schemacie jest najbardziej prawdopodobna, czyli inaczej, która z liczb $P_N(k)$ określonych wzorem (*) jest największa?

Gdy $p = 0$ lub $p = 1$, odpowiedź otrzymujemy natychmiast: jest to 0, gdy sukces w jednej próbie jest zdarzeniem niemożliwym ($p = 0$), lub N , gdy jest on zdarzeniem pewnym ($p = 1$).

Szukając więc najbardziej prawdopodobnej liczby sukcesów w schemacie N prób Bernoulliego, czyli takiej wartości k_0 spośród $0, 1, 2, 3, \dots, N$, dla której prawdopodobieństwo $P_N(k_0)$ jest największe, zakładamy, że $p \neq 0$ i $p \neq 1$ (to znaczy, że sukces w pojedynczej próbie nie jest zdarzeniem niemożliwym i nie jest zdarzeniem pewnym). W tym celu zbadajmy iloraz $\frac{P_N(k+1)}{P_N(k)}$.

Obliczamy:

$$\frac{P_N(k+1)}{P_N(k)} = \frac{\binom{N}{k+1} p^{k+1} \cdot q^{N-(k+1)}}{\binom{N}{k} p^k \cdot q^{N-k}} = \frac{N!}{(k+1)! [N-(k+1)]!} \cdot \frac{k!(N-k)!}{N!} \cdot \frac{p}{q} = \frac{N-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q}.$$

Wobec tego:

$$\frac{P_N(k+1)}{P_N(k)} > 1 \Leftrightarrow \frac{N-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q} > 1 \Leftrightarrow k < (N+1)p - 1, \text{ zaś:}$$

$$\frac{P_N(k+1)}{P_N(k)} < 1 \Leftrightarrow k > (N+1)p - 1.$$

Stąd wynika, że:

$$(1) P_N(k+1) > P_N(k) \text{ dla } k < (N+1)p - 1,$$

$$(2) P_N(k+1) < P_N(k) \text{ dla } k > (N+1)p - 1.$$

Zatem ciąg $P_N(k)$ jest:

- rosnący dla $k < (N+1)p - 1$,
- malejący dla $k > (N+1)p - 1$.

Spośród liczb całkowitych k spełniających nierówność $k < (N+1)p - 1$ największą jest liczba $[(N+1)p] - 1$, zaś spośród liczb całkowitych k spełniających nierówność $k > (N+1)p - 1$ najmniejszą jest liczba $[(N+1)p] - 1$ ($[x]$ oznacza tutaj tzw. część całkowitą liczby x).

Biorąc to pod uwagę, a także uwzględniając nierówności (1) i (2), otrzymujemy wniosek: **Wniosek.** Jeżeli $(N+1)p$ **nie jest liczbą całkowitą**, to najbardziej prawdopodobną liczbą sukcesów w schemacie N prób Bernoulliego jest $[(N+1)p]$ (część całkowita liczby $(N+1)p$).

Jeżeli $(N+1)p$ **jest liczbą całkowitą**, to najbardziej prawdopodobnymi liczbami sukcesów w schemacie N prób Bernoulliego są liczby $(N+1)p - 1$ i $(N+1)p$ i prawdopodobieństwa ich są równe.

Przykład 1. Rzucamy 10 razy kostką sześcienną do gry. Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba wyrzuconych szóstek?

Rozwiązanie:

Mamy tutaj schemat 10 prób Bernoulliego, w którym sukcesem pojedynczej próby jest wypadnięcie szóstki i zachodzi on z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{6}$. Ponieważ $(N + 1)p = \frac{11}{6}$ i $\left\lfloor \frac{11}{6} \right\rfloor = 1$, więc najbardziej prawdopodobną liczbą wyrzuconych szóstek w dziesięciu rzutach kostką jest 1.

Przykład 2. Rzucamy $2n$ razy symetryczną monetą. Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba otrzymanych orłów?

Rozwiązanie:

Doświadczenie to jest schematem $2n$ prób Bernoulliego, gdzie sukcesem w pojedynczej próbie jest wypadnięcie orła. Zatem $p = \frac{1}{2}$ i $N = 2n$, więc $(N + 1)p = (2n + 1) \cdot \frac{1}{2}$ i $\left\lfloor (2n + 1) \cdot \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor n + \frac{1}{2} \right\rfloor = n$. Wobec tego najbardziej prawdopodobną liczbą wyrzuconych orłów w $2n$ rzutach symetryczną monetą jest n .

Przykład 3. Strzelając do tarczy, trafiasz do celu za każdym razem z prawdopodobieństwem 0,9. Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba twoich trafnych strzałów w serii 99 strzałów?

Rozwiązanie:

Mamy tutaj schemat 99 prób Bernoulliego, a prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie wynosi $p = 0,9$. Ponieważ $(N + 1)p = 100 \cdot \frac{9}{10} = 90$, więc najbardziej prawdopodobnymi liczbami celnych strzałów są liczby 89 i 90.

Pytania i zadania

1. Oblicz najbardziej prawdopodobną liczbę wypadnięcia piątki w 100 rzutach kostką do gry.
2. Oblicz najbardziej prawdopodobną liczbę wypadnięcia reszki w 20 rzutach symetryczną monetą.
3. Rzucamy kostką do gry. Sukcesem w pojedynczym rzucie będzie wypadnięcie parzystej liczby oczek. Oblicz najbardziej prawdopodobną liczbę sukcesów w serii 99 rzutów kostką.
4. Pewna fabryka produkuje nakrętki i w każdym tysiącu ich sztuk jest 15 wadliwych. Jaka będzie najbardziej prawdopodobna liczba wadliwych nakrętek w partii liczącej 3000 sztuk?

17. Elementy statystyki opisowej

Ze statystyką mamy do czynienia bardzo często. Z prasy, radia i telewizji docierają do nas informacje na temat poziomu zatrudnienia, zarobków, produkcji przemysłowej, liczby oddanych do użytku mieszkań, wypadków komunikacyjnych itp. Są to tak zwane dane statystyczne.

Statystyka jest nauką, która odpowiada na pytania, jak takie dane zbierać i jak je opracowywać, aby następnie uzyskiwać z nich wiarygodne wnioski.

O sposobach przedstawiania danych statystycznych i poprawnym odczytywaniu ich z wykresów, tabel i diagramów nauczyliście się już w gimnazjum. Poznaliście wówczas między innymi takie pojęcia jak średnia arytmetyczna i mediana. Powrócimy do nich teraz, a także poznamy kilka nowych, ilustrując je przykładami.

Średnia arytmetyczna

Pojęcie to znamy dobrze. Słyszymy przecież w szkole o średniej ocen ucznia, średniej ocen klasy, średniej frekwencji. Mówi się także o średnim zużyciu paliwa przez samochód, średniej zarobków w firmie, średniej temperaturze w danym miesiącu itd.

Średnią arytmetyczną n liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ nazywamy liczbę równą:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}.$$

Liczbę tę nazywać też będziemy krótko – średnią i oznaczać symbolem \bar{x} . Średnia ta ma następujące własności, które ułatwiają jej obliczanie:

1. Gdy każdą z liczb x_1, x_2, \dots, x_n zmniejszymy (lub zwiększymy) o a , to średnia tych liczb także zmniejszy się (lub zwiększy) o a .
2. Średnia n liczb równych a jest równa a .

Oto przykłady dotyczące definicji i jej własności:

1. Średnia arytmetyczna liczb $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ wynosi:

$$\frac{(-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3}{7} = \frac{0}{7} = 0.$$

2. Średnia arytmetyczna liczb $101, 102, 103, 104, 105$ jest równa:

$$\begin{aligned} \frac{101 + 102 + 103 + 104 + 105}{5} &= \frac{1 + 100 + 2 + 100 + 3 + 100 + 4 + 100 + 5 + 100}{5} = \\ &= \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} + 100 = 3 + 100 = 103. \end{aligned}$$

3. Średnia arytmetyczna liczb $13, 13, 13, 13, 13$ wynosi 13 .

Średnia ważona

Średnią arytmetyczną obliczamy zazwyczaj wtedy, gdy opracowując dane statystyczne, chcemy scharakteryzować pewien cały ich zestaw. Jednak czasami niektóre z tych danych mają większe znaczenie od innych. Wówczas, chcąc to uwzględnić, obliczamy tak zwaną średnią ważoną.

Przykład 1. W pewnej dwudziestoosobowej klasie wystawiono na pierwszy semestr następujące oceny z matematyki: $4, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 4, 3, 3, 6, 5, 5, 6, 4, 4, 2, 2, 5, 6$. Jeśli je zestawimy według ocen, otrzymamy: 2 dopuszczające, 4 dostateczne, 6 dobrych, 5 bardzo dobrych i 3 celujące; łatwiej teraz będzie obliczyć średnią tych ocen:

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 3}{20} = 4,15.$$

Średnią tę możemy zapisać także następująco: $\bar{x} = 2 \cdot \frac{2}{20} + 3 \cdot \frac{4}{20} + 4 \cdot \frac{6}{20} + 5 \cdot \frac{5}{20} + 6 \cdot \frac{3}{20}$,

przy czym liczby: $\frac{2}{20}, \frac{4}{20}, \frac{6}{20}, \frac{5}{20}, \frac{3}{20}$ oznaczają częstość, z jaką pojawiają się w całym zestawie ocen odpowiednio oceny: dopuszczająca, dostateczna, dobra, bardzo dobra i celująca. Tak zapisana średnia nazywa się średnią ważoną ocen $2, 3, 4, 5, 6$, zaś wymieniona ich częstość nazywa się wagą tych ocen. Opisuje to definicja:

Średnią ważoną liczb x_1, x_2, \dots, x_k , z których x_1 powtarza się n_1 razy, x_2 powtarza się n_2 razy, x_3 powtarza się n_3 razy itd. ..., x_k powtarza się n_k razy, gdzie $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, nazywamy liczbę (którą oznaczać będziemy także symbolem \bar{x}) równą:

$x_1 \cdot \frac{n_1}{n} + x_2 \cdot \frac{n_2}{n} + \dots + x_k \cdot \frac{n_k}{n}$, w której częstość $\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \dots, \frac{n_k}{n}$ jest **wagą** odpowiednio liczb x_1, x_2, \dots, x_k .

Przykład 2. W mieszance N kg cukierków jest: n_1 kg cukierków po x_1 zł za 1 kg, n_2 kg cukierków po x_2 zł za 1 kg, ..., n_k cukierków po x_k zł za 1 kg. Jaka powinna być cena 1 kg tej mieszanki?

Rozwiązanie:

Oznaczmy szukaną cenę 1 kg tej mieszanki cukierków przez x . Wówczas wartość całej mieszanki będzie wynosiła $N \cdot x$. Jeśli zaś weźmiemy pod uwagę skład mieszanki, ma ona wartość $n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k$. Stąd zapisujemy równanie:

$N \cdot x = n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + \dots + n_k \cdot x_k$, którego rozwiązaniem jest:

$$x = x_1 \cdot \frac{n_1}{N} + x_2 \cdot \frac{n_2}{N} + \dots + x_k \cdot \frac{n_k}{N}.$$

Widzimy więc, że cena 1 kg tej mieszanki powinna być średnią ważoną cen jej składników, czyli liczb: x_1, x_2, \dots, x_k , z wagami odpowiednio: $\frac{n_1}{N}, \frac{n_2}{N}, \dots, \frac{n_k}{N}$.

Grupowanie danych i ich średnie

Podzielmy zestaw danych x_1, x_2, \dots, x_n na dwie grupy odpowiednio n_1 i n_2 liczb, gdzie $n_1 + n_2 = n$, a następnie obliczmy średnie ważone \bar{x}_1 i \bar{x}_2 liczb w tych grupach. Wówczas średnią ważoną \bar{x} wszystkich n liczb x_1, x_2, \dots, x_n , możemy obliczać ze wzoru:

$$(*) \bar{x} = \bar{x}_1 \cdot \frac{n_1}{n} + \bar{x}_2 \cdot \frac{n_2}{n}.$$

Średnia \bar{x} jest więc średnią ważoną liczb \bar{x}_1 i \bar{x}_2 . Zauważmy przy tym, że:

$$\bar{x} \in (\bar{x}_1; \bar{x}_2), \text{ gdy } \bar{x}_1 < \bar{x}_2;$$

$$\bar{x} \in (\bar{x}_2; \bar{x}_1), \text{ gdy } \bar{x}_1 \geq \bar{x}_2;$$

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2}, \text{ gdy } n_1 = n_2.$$

Przykład 1. Turysta wybrał się na dwudniową wycieczkę, którą podzielił na kilka etapów. W pierwszym dniu przebył cztery etapy po 5 km każdy, a w drugim – sześć etapów po 3 km każdy. Jaka była średnia długość etapu tej wycieczki?

Rozwiązanie:

Podstawiając występujące tu dane do wzoru (*), otrzymujemy: $\bar{x} = 5 \cdot \frac{4}{10} + 3 \cdot \frac{6}{10} = 3,8$. Zatem średnia długość etapu tej wycieczki wynosi 3,8 km.

Zbiór n liczb możemy oczywiście podzielić na więcej grup, na przykład na k grup ($k \geq 3$), po odpowiednio n_1, n_2, \dots, n_k liczb w każdej z nich. Wówczas średnią ważoną \bar{x} tych n liczb obliczamy ze wzoru:

$$(**) \bar{x} = \bar{x}_1 \cdot \frac{n_1}{n} + \bar{x}_2 \cdot \frac{n_2}{n} + \dots + \bar{x}_k \cdot \frac{n_k}{n}, \text{ gdzie } \bar{x}_i \text{ jest średnią ważoną } n_i \text{ liczb } i\text{-tej grupy}$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, k).$$

Przykład 2. Pewna dwudziestoosobowa sportowa klasa licealna udała się do szkolnego gabinetu lekarskiego na badania, podczas których zmierzono między innymi wzrost każdego ucznia. Wyniki pomiaru w centymetrach przedstawia tabelka:

Lp.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Wzrost	171	172	168	181	180	169	167	163	175	174	178	164	177	170	171	182	174	178	178	183

Ryc. 6.6.

Uporządkujmy wyniki rosnąco:

163, 164, 167, 168, 169, 170, 171, 171, 172, 174, 174, 175, 177, 178, 178, 178, 180, 181, 182, 183, a następnie podzielmy je na cztery grupy odpowiadające przedziałom: $\langle 160; 170 \rangle$; $\langle 170; 175 \rangle$; $\langle 175; 180 \rangle$; $\langle 180; 185 \rangle$. Obliczmy częstość każdego z wyników. Ponieważ w pierwszej grupie znalazło się 5 wyników na 20, więc częstość w tej grupie wynosi $\frac{5}{20}$. W drugiej grupie mamy 6 wyników, w trzeciej 5, a w czwartej 4, więc częstość w grupie jest odpowiednio równa: $\frac{6}{20}$, $\frac{5}{20}$ i $\frac{4}{20}$. Średnie arytmetyczne wyników pomiaru w kolejnych czterech grupach wynoszą:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \frac{163 + 164 + 167 + 168 + 169}{5} = \frac{160 + 3 + 160 + 4 + 160 + 7 + 160 + 8 + 160 + 9}{5} = \\ &= 160 + \frac{3 + 4 + 7 + 8 + 9}{5} = 160 + 6,2 = 166,2;\end{aligned}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{170 + 171 + 171 + 172 + 174 + 174}{6} = 170 + \frac{1 + 1 + 2 + 4 + 4}{6} = 170 + 2 = 172;$$

$$\bar{x}_3 = \frac{175 + 177 + 178 + 178 + 178}{5} = 175 + \frac{2 + 3 + 3 + 3}{5} = 175 + 2,2 = 177,2;$$

$$\bar{x}_4 = \frac{180 + 181 + 182 + 183}{4} = 180 + \frac{1 + 2 + 3}{4} = 180 + 1,5 = 181,5.$$

Zatem średnia ważona liczb \bar{x}_1 , \bar{x}_2 , \bar{x}_3 i \bar{x}_4 :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 166,2 \cdot \frac{5}{20} + 172 \cdot \frac{6}{20} + 177,2 \cdot \frac{5}{20} + 181,5 \cdot \frac{4}{20} = \\ &= \frac{1}{20} \cdot (831 + 1032 + 886 + 726) = \frac{3475}{20} = 173,5\end{aligned}$$

i stanowi średni wzrost uczniów tej klasy.

Mediana i dominanta

Załóżmy, że mamy skończony zbiór liczb: $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Uporządkujmy je rosnąco: $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$. **Medianą** albo **środkową** tego zbioru nazywamy:

a) liczbę środkową w tym zbiorze, czyli liczbę $x_{\frac{n+1}{2}}$, gdy n jest liczbą nieparzystą;

b) średnią arytmetyczną liczb środkowych, to znaczy liczbę $\frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})$, gdy n jest liczbą parzystą.

Gdy $n = 2k + 1$, wówczas medianą zbioru $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2k}, x_{2k+1}\}$ liczb uporządkowanych rosnąco:

$$\underbrace{x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_k}_{k \text{ liczb}} < \underbrace{x_{k+1}}_{\substack{\text{liczba} \\ \text{środkowa}}} < \underbrace{x_{k+2} < \dots < x_{2k} < x_{2k+1}}_{k \text{ liczb}} \text{ jest liczba } x_{k+1}.$$

Gdy $n = 2k$, to medianą zbioru $\{x_1, x_2, \dots, x_{2k}\}$ liczb uporządkowanych rosnąco:

$$\underbrace{x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1}}_{k-1 \text{ liczb}} < \underbrace{x_k < x_{k+1}}_{\substack{\text{liczby} \\ \text{środkowe}}} < \underbrace{x_{k+2} < \dots < x_{2k}}_{k-1 \text{ liczb}}$$

jest liczba $\frac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

Nazwa „mediana” pochodzi od łacińskiego słowa *medianus*, co oznacza: środkowy.

Rozpatrzmy pojęcie mediany na przykładach:

1. Medianą zbioru $\{8, 6, 2, 1, 3, 7, 5\}$ jest 5, ponieważ po uporządkowaniu tych siedmiu liczb mamy:

$$1, 2, 3, \boxed{5}, 6, 7, 8.$$

liczba
środkowa

2. Medianą zbioru $\{11, 2, 7, 5, 13, 3\}$ jest 6, bo po uporządkowaniu tych sześciu liczb mamy:

$$2, 3, \boxed{5, 7}, 11, 13, \text{ czyli dwie liczby środkowe, których średnia arytmetyczna to:}$$

liczby
środkowe

$$\frac{5 + 7}{2} = 6.$$

Mediana ma podobne własności jak średnia arytmetyczna:

- Jeżeli wszystkie liczby danego zbioru skończonego liczb zwiększymy (lub zmniejszymy) o tę samą liczbę, to mediana tego zbioru także zwiększy się (lub zmniejszy) o tę liczbę.
- Mediana liczb równych a jest równa a .

Oto przykłady:

1. Temperatura w siedmiu kolejnych dniach tej zimy wynosiła w Toruniu odpowiednio:
 $-7^\circ\text{C}, -13^\circ\text{C}, -5^\circ\text{C}, 0^\circ\text{C}, 2^\circ\text{C}, 4^\circ\text{C}, 6^\circ\text{C}$.

Mediana tych temperatur jest równa 0°C . Chcąc je wyrazić w stopniach Kelvina, trzeba do każdej z nich dodać 273,15. Zatem mediana tych temperatur w kelwinach wynosi 273,15.

2. Mediana liczb 2004, 2004, 2004, 2004 wynosi 2004.

Warto zauważyć, że gdy w danym zbiorze jest ich parzysta liczba, to połowa z nich jest mniejsza od mediany danego zbioru, a połowa – od niej większa. Istotnie, jeśli mamy zbiór $\{x_1, x_2, \dots, x_{2n}\}$, gdzie $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} < x_{n+2} < \dots < x_{2n}$, to jego medianą jest, jak wiemy, liczba $\frac{x_n + x_{n+1}}{2}$. Możemy teraz wykazać, że gdy $x_n < x_{n+1}$, to $x_n < \frac{x_n + x_{n+1}}{2} < x_{n+1}$.

Na przykład:

- Mediana liczb: 2, 4, 6, 8, 10, 12 to $\frac{6+8}{2} = 7$; połowa z tych liczb jest mniejsza, a połowa większa od 7.
- Medianą liczb: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 jest 7, zaś zarówno liczb mniejszych, jak i większych od 7 jest mniej niż połowa podanych liczb. Przykład ten pokazuje, że założenie o ich parzystej liczbie w zbiorze jest istotne.

Dominantą w badanej grupie danych nazywamy tę daną, która w tej grupie występuje najczęściej. Wśród niektórych danych może występować wiele dominant.

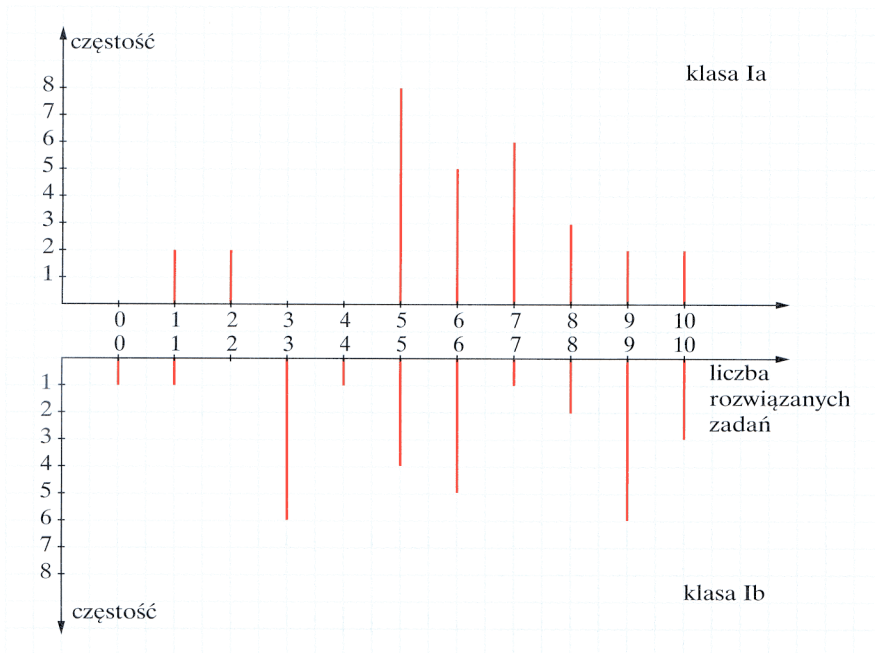
Na przykład:

1. Wśród liczb: $-2, 1, 3, -1, 1, 2, 4, 1$ dominantą jest 1.
2. Wśród liczb $1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 7$ dominantami są liczby: 2, 4, 6.

Dominanta ma podobne właściwości jak mediana i średnia.

Wariancja i odchylenie standardowe

Przykład 1. W dwóch równoległych klasach Ia i Ib pewnego liceum przeprowadzono ten sam sprawdzian z matematyki. Uczniowie mieli do rozwiązania 10 zadań. Wyniki sprawdzianu (liczbę rozwiązanych zadań) przedstawiono w diagramach słupkowych (ryc. 6.7).



Ryc. 6.7.

Zauważcie, że w obu klasach średnia liczb rozwiązanych zadań jest taka sama i wynosi 6, choć w Ia znakomita większość uczniów rozwiązała liczbę zadań zbliżoną do średniej, zaś w Ib liczby te są bardziej zróżnicowane. Wyniki sprawdzianu w klasie Ib są, według statystycznego terminu, bardziej rozproszone niż w klasie Ia.

Zobaczmy teraz, czy to rozproszenie przekłada się na wyższą średnią ocen ze sprawdzianu w klasie Ia. Przyjmijmy, że uczeń otrzymuje ocenę:

- bardzo dobrą (bdb) za rozwiązanie 10 lub 9 zadań,
- dobrą (db) za rozwiązanie 8 lub 7 zadań,
- dostateczną (dst) za rozwiązanie 6 lub 5 zadań,
- dopuszczającą (dop) za rozwiązanie 4 lub 3 zadań,
- niedostateczną (ndst) za rozwiązanie mniej niż 3 zadań.

W klasie Ia był taki oto zestaw ocen: 4 bdb, 9 db, 13 dst i 4 ndst, których średnia $\bar{x}_1 = 5 \cdot \frac{4}{30} + 4 \cdot \frac{9}{30} + 3 \cdot \frac{13}{30} + 1 \cdot \frac{4}{30} = \frac{99}{30} = 3,30$, w klasie Ib zaś otrzymaliśmy następujący zestaw

ocen: 9 bdb, 3 db, 9 dst, 7 dop i 2 ndst, których średnia $\bar{x}_2 = 5 \cdot \frac{9}{30} + 4 \cdot \frac{3}{30} + 3 \cdot \frac{9}{30} + 2 \cdot \frac{7}{30} + 1 \cdot \frac{2}{30} = \frac{1}{30}(45 + 12 + 27 + 14 + 2) = \frac{1}{30} \cdot 100 = 3,33$. Widzimy zatem, że uczniowie klasy Ib lepiej wypadli w tym sprawdzianie niż uczniowie klasy Ia. Nie w każdym jednak badaniu statystycznym rozproszenie danych można tak łatwo dostrzec. Wówczas trzeba zmierzyć rozproszenie za pomocą: **rozstępu, wariancji i odchylenia standardowego**.

Rozstępem liczb x_1, x_2, \dots, x_n nazywamy różnicę między największą i najmniejszą z tych liczb. !

Na przykład rozstępem liczb rozwiązanych zadań w klasach Ia i Ib jest ta sama liczba, mianowicie $10 = 10 - 0$, mimo że rozproszenia liczb rozwiązanych zadań przez uczniów tych klas są różne.

Rozstęp jest więc niedokładną miarą rozproszenia liczb, ponieważ przy jego obliczaniu bierze się pod uwagę jedynie największą i najmniejszą spośród danych liczb, pomijając pośrednie. Dokładniejszą miarą rozproszenia liczb jest wariancja.

Wariancją liczb x_1, x_2, \dots, x_k , z których x_1 powtarza się n_1 razy, x_2 powtarza się n_2 razy, ..., x_k powtarza się n_k razy, gdzie $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, nazywamy liczbę oznaczoną symbolem S^2 i określoną wzorem !

$$(*) S^2 = (x_1 - \bar{x})^2 \cdot \frac{n_1}{n} + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot \frac{n_2}{n} + \dots + (x_k - \bar{x})^2 \cdot \frac{n_k}{n},$$

gdzie \bar{x} jest średnią ważoną liczb x_1, x_2, \dots, x_k z wagami odpowiednio $\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \dots, \frac{n_k}{n}$.

Widzimy zatem, że w określeniu wariancji występują wszystkie dane x_1, x_2, \dots, x_k , więc jej wartość zależy od każdej z nich, nie zaś tylko od niektórych, jak dzieje się przy wyznaczaniu rozstępu.

Przykład 2. Obliczmy wariancje liczb zadań rozwiązanych na sprawdzianie w klasach: Ia i Ib (zob. przykład 1).

Wariancja w klasie Ia:

$$S_1^2 = (1-6)^2 \cdot \frac{2}{30} + (2-6)^2 \cdot \frac{2}{30} + (5-6)^2 \cdot \frac{8}{30} + (6-6)^2 \cdot \frac{5}{30} + (7-6)^2 \cdot \frac{6}{30} + (8-6)^2 \cdot \frac{3}{30} + (9-6)^2 \cdot \frac{2}{30} + (10-6)^2 \cdot \frac{2}{30} =$$

$$= \frac{1}{30}(25 \cdot 2 + 16 \cdot 2 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 16 \cdot 2) =$$

$$= \frac{1}{30}(50 + 32 + 8 + 0 + 6 + 12 + 18 + 32) = \frac{158}{30} = 5 \frac{4}{15}, \text{ zaś wariancja w klasie Ib:}$$

$$S_2^2 = (0-6)^2 \cdot \frac{1}{30} + (1-6)^2 \cdot \frac{1}{30} + (3-6)^2 \cdot \frac{6}{30} + (4-6)^2 \cdot \frac{1}{30} + (5-6)^2 \cdot \frac{4}{30} + (6-6)^2 \cdot \frac{5}{30} + (7-6)^2 \cdot \frac{1}{30} + (8-6)^2 \cdot \frac{2}{30} + (9-6)^2 \cdot \frac{6}{30} + (10-6)^2 \cdot \frac{3}{30} =$$

$$= \frac{1}{30}(36 + 25 + 9 \cdot 6 + 4 + 4 + 0 \cdot 5 + 1 + 4 \cdot 2 + 9 \cdot 6 + 16 \cdot 3) =$$

$$= \frac{1}{30}(36 + 25 + 54 + 4 + 4 + 1 + 8 + 54 + 48) = \frac{234}{30} = 7 \frac{4}{5}.$$

Z obliczeń tych wynika, że im większe rozproszenie danych (jak to ma miejsce w klasie Ib), tym większa ich wariancja.

Uwaga. Wzorowi (*) podanemu w definicji wariancji można nadać prostszą postać:

$$(**) S^2 = x_1^2 \cdot \frac{n_1}{n} + x_2^2 \cdot \frac{n_2}{n} + \dots + x_k^2 \cdot \frac{n_k}{n} - \bar{x}^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Istotnie: } S^2 &= (x_1 - \bar{x})^2 \cdot \frac{n_1}{n} + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot \frac{n_2}{n} + \dots + (x_k - \bar{x})^2 \cdot \frac{n_k}{n} = \\ &= \left(x_1^2 - 2x_1 \cdot \bar{x} + \bar{x}^2 \right) \cdot \frac{n_1}{n} + \left(x_2^2 - 2x_2 \cdot \bar{x} + \bar{x}^2 \right) \cdot \frac{n_2}{n} + \dots + \left(x_k^2 - 2x_k \cdot \bar{x} + \bar{x}^2 \right) \cdot \frac{n_k}{n} = \\ &= \left(x_1^2 \cdot \frac{n_1}{n} + x_2^2 \cdot \frac{n_2}{n} + \dots + x_k^2 \cdot \frac{n_k}{n} \right) - 2\bar{x} \left(x_1 \cdot \frac{n_1}{n} + x_2 \cdot \frac{n_2}{n} + \dots + x_k \cdot \frac{n_k}{n} \right) + \\ &+ \bar{x}^2 \cdot \left(\frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \dots + \frac{n_k}{n} \right) = \left(x_1^2 \cdot \frac{n_1}{n} + x_2^2 \cdot \frac{n_2}{n} + \dots + x_k^2 \cdot \frac{n_k}{n} \right) - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \\ &= x_1^2 \cdot \frac{n_1}{n} + x_2^2 \cdot \frac{n_2}{n} + \dots + x_k^2 \cdot \frac{n_k}{n} - \bar{x}^2. \end{aligned}$$

Mierzenie rozproszenia danych ich wariancją jest jednak dość niewygodne, ponieważ wyniki otrzymujemy w jednostkach kwadratowych miara.

Jeśli na przykład zmierzmy długości pchnięcia kulą, otrzymujemy wariancję tych pomiarów równą 10 cm². Gdy przejdziemy na pomiary w milimetrach, wariancja wzrośnie nie 10 razy, lecz 100 razy (do 1000).

Miernikiem rozproszenia danych niemającym tej własności wariancji jest odchylenie standardowe.



Odchyleniem standardowym danych nazywamy pierwiastek kwadratowy z ich wariancji.

Odchylenie standardowe danych oznaczamy literą *s*.

Tak więc odchyleniem standardowym jest liczba:

$$s = \sqrt{S^2} = \sqrt{\left(x_1 - \bar{x} \right)^2 \cdot \frac{n_1}{n} + \left(x_2 - \bar{x} \right)^2 \cdot \frac{n_2}{n} + \dots + \left(x_k - \bar{x} \right)^2 \cdot \frac{n_k}{n}},$$

która charakteryzuje średni poziom faktycznych odchyień danych x_1, x_2, \dots, x_k od ich średniej ważonej \bar{x} .

Obliczmy raz jeszcze wariancje liczb zadań rozwiązanych podczas sprawdzianu przez uczniów klas Ia i Ib, tym razem z zastosowaniem wzoru (**), oraz odchylenia standardowe tych wariancji.

Mamy wariancje:

$$\begin{aligned} S_1^2 &= 1^2 \cdot \frac{2}{30} + 2^2 \cdot \frac{2}{30} + 5^2 \cdot \frac{8}{30} + 6^2 \cdot \frac{5}{30} + 7^2 \cdot \frac{6}{30} + 8^2 \cdot \frac{3}{30} + 9^2 \cdot \frac{2}{30} + 10^2 \cdot \frac{2}{30} - 6^2 = \\ &= \frac{1}{30} (1 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 25 \cdot 8 + 36 \cdot 5 + 49 \cdot 6 + 64 \cdot 3 + 81 \cdot 2 + 100 \cdot 2) - 36 = \\ &= \frac{1238}{30} - 36 = \frac{1238 - 1080}{30} = \frac{158}{30} \approx 5,27; \\ S_2^2 &= 0^2 \cdot \frac{1}{30} + 1^2 \cdot \frac{1}{30} + 3^2 \cdot \frac{6}{30} + 4^2 \cdot \frac{1}{30} + 5^2 \cdot \frac{4}{30} + 6^2 \cdot \frac{5}{30} + 7^2 \cdot \frac{1}{30} + \\ &+ 8^2 \cdot \frac{2}{30} + 9^2 \cdot \frac{6}{30} + 10^2 \cdot \frac{3}{30} - 6^2 = \\ &= \frac{1}{30} (1 + 9 \cdot 6 + 16 + 25 \cdot 4 + 36 \cdot 5 + 49 + 64 \cdot 2 + 81 \cdot 6 + 100 \cdot 3) - 36 = \end{aligned}$$

$$= \frac{1314}{30} - 36 = \frac{1314 - 1080}{30} = \frac{234}{30} = 7,8$$

oraz odchylenia standardowe: $s_1 = \sqrt{5,27} \approx 2,29$, $s_2 = \sqrt{7,8} \approx 2,79$, obliczone z dokładnością do 0,01.

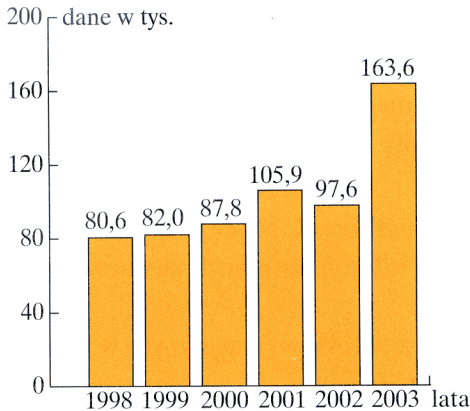
Widzimy, że odchylenie standardowe w klasie Ib (w której rozproszenie danych jest większe) jest większe niż w klasie Ia (w której rozproszenie danych jest mniejsze).

Pytania i zadania



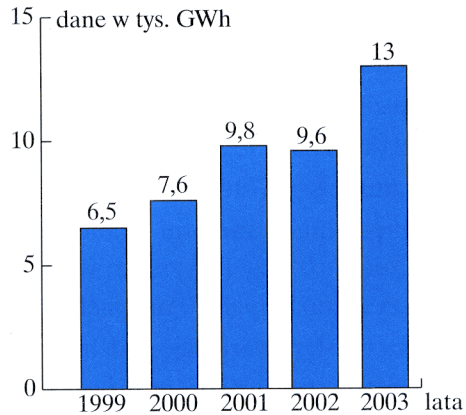
- Podaj określenie:
 - średniej arytmetycznej,
 - średniej ważonej.
- Oblicz średnią arytmetyczną liczb:
 - pierwszych mniejszych od 10;
 - $-3,5; -3; -2,5; -2; -1,5; -1; 0; 1; 5,2$;
 - liczb parzystych od 2 do 100;
 - liczb nieparzystych od 1 do 99.
- Na diagramie z ryciny 6.8 widzimy, ile mieszkań oddano do użytku w minionych sześciu latach. Oblicz, jaką średnią liczbę mieszkań oddawano rocznie w tych sześciu latach.
- Diagram na rycinie 6.9 przedstawia eksport energii elektrycznej z Polski w minionych pięciu latach. Oblicz, ile średnio energii elektrycznej eksportowano z Polski rocznie w tym okresie.

Liczba mieszkań oddanych do użytku
dane w tys.



Ryc. 6.8. (źródło: GUS)

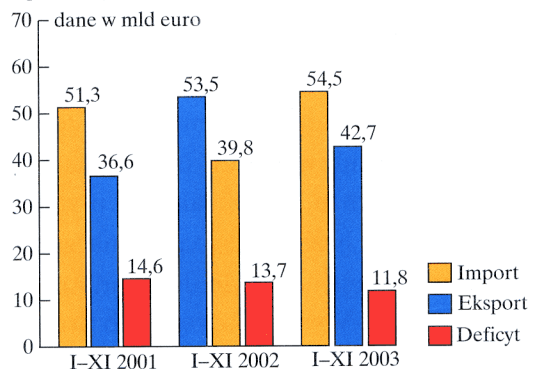
Ilość energii elektrycznej wyeksportowanej z Polski
dane w tys. GWh



Ryc. 6.9. (źródło: PSE SA)

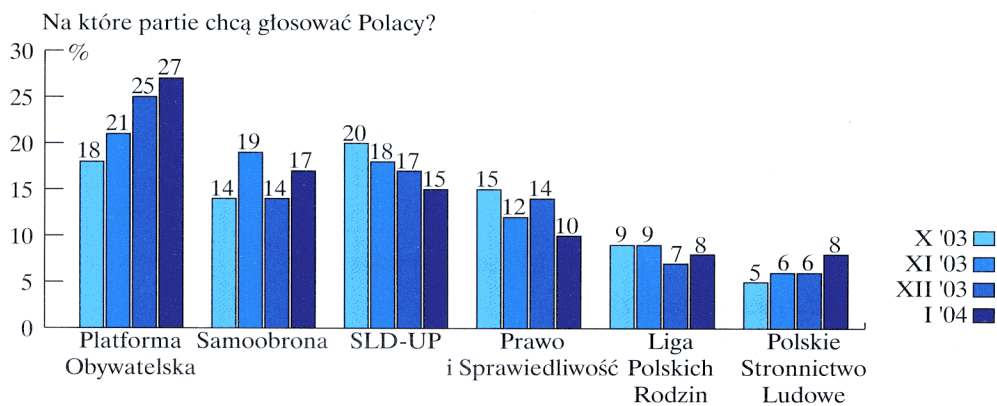
- Oblicz średnią ważoną liczb: 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6.
- Wstaw w miejsce x taką liczbę, aby średnia arytmetyczna liczb: $-5, -1, x, 2, 3, 7$ wynosiła 1.
- Oblicz średnią wielkość importu, eksportu i deficytu w handlu zagranicznym w każdym podanym roku, korzystając z danych, które przedstawia diagram obok (ryc. 6.10).

Import, eksport, deficyt w handlu zagranicznym
dane w mld euro



Ryc. 6.10. (źródło: GUS)

8. Oblicz średnie procentowe poparcie, jakiego udzielili Polacy każdej z partii politycznych w ciągu wskazanych czterech miesięcy, korzystając z danych zamieszczonych na poniższym diagramie (ryc. 6.11).



Ryc. 6.11. (źródło: Pentor)

9. Rzuć 30 razy kostką do gry i oblicz średnią liczbę wyrzuconych oczek.
10. W mieszance cukierków są ich trzy rodzaje: 5 kg czekoladowych w cenie 13 zł za 1 kg, 2 kg orzechowych w cenie 10 zł za 1 kg i 3 kg owocowych w cenie 5 zł za 1 kg. Jaka powinna być cena 1 kg tej mieszanki?
11. Podaj określenie mediany i dominanty.
12. Wyznacz medianę i dominantę swoich ocen na świadectwie z poprzedniej klasy.
13. Czy mediana liczb może być równa ich średniej?
14. Wyznacz medianę wszystkich liczb pierwszych mniejszych od a) 30; b) 50.
15. Dołącz do liczb 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5 taką liczbę, aby mediana nowej grupy liczb:
- a) nie zmniejszyła się, b) zwiększyła się, c) zmniejszyła się.
16. Rzuć pięcioma monetami i zanotuj, ile razy wypadł orzeł. Następnie powtórz to doświadczenie 10 razy i wyznacz: średnią, medianę i dominantę liczb wyrzucenia orłów, jakie uzyskano w tych 10 próbach.
17. Wyznacz rozstęp, wariancję i odchylenie standardowe wyników otrzymanych w zadaniu 14.
18. Co to jest: rozstęp, wariancja i odchylenie standardowe?
19. Oblicz rozstęp, wariancję i odchylenie standardowe liczb: $-10, -4, -2, 0, 1, 3, 5$.
20. Zapytaj wszystkich w swojej klasie, ile czasu spędzają dziennie przy komputerze. Użyte dane przedstaw na diagramie słupkowym oraz oblicz ich: rozstęp, wariancję i odchylenie standardowe.
21. Przedstaw na diagramie słupkowym oceny z ostatniej klasówki w twojej i w sąsiedniej klasie, a następnie wyznacz: rozstęp, wariancję i odchylenie standardowe tych ocen.
22. Przeprowadź w swojej klasie ankietę dotyczącą czasu przeznaczanego dziennie na uprawianie sportu. Wyniki ankiety przedstaw na diagramie słupkowym, a następnie oblicz:
- a) średnią liczbę godzin przeznaczanych dziennie na uprawianie sportu w twojej klasie;
- b) wariancję i odchylenie standardowe czasu przeznaczanego dziennie na uprawianie sportu. Wynik zaokrąglij do drugiego miejsca po przecinku.
- 23*. Udowodnij, że odchylenie standardowe s jest zawsze nie większe od rozstępu R .

Odpowiedzi i wskazówki

Rozdział I.

1.

3. a) $\frac{1}{27}$; 5; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{8}$; 16; b) 74; c) 3.

4. a) 2^{12} ; b) 3^3 ; c) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$; d) 2^{-6} ; e) 2^{-3} ; f) 2^8 .

5. a) $-\frac{9}{128}$; b) $\frac{1}{8}$; c) $\frac{4}{5}$; d) $-\frac{2}{5}$.

6. a) $4x^{-8}y^{-3}$; b) $x^{-2}y^{-2}$; c) 2^{-2} ; d) $\frac{1}{8}x^{-5}y^5$; e) $\frac{1}{4}x^{-10}y^8$; f) x^2y^{-2} .

7. a) $n = 5$; b) $n = 6$; c) $n = 1$; d) $n = 3$; e) $n = 2$; f) $n = -5$; g) $n = -6$; h) $n = -5$.

8. a) $n = 6$; b) $n = 3$ lub $n = 4$ lub $n = 5$; c) $n = 5$; d) $n = 3$; e) $n = 2$ lub $n = 3$, lub $n = 4$; f) $n = 2$ lub $n = 3$.

9. a) $5^{18} < 2^{45} < 4^{27} < 3^{36}$, bo $5^{18} = 25^9$, $2^{45} = 32^9$, $4^{27} = 64^9$, $3^{36} = 81^9$; b) $63^{23} < 4^{100} < 32^{50}$, gdyż $63^{23} < 64^{23} = 4^{69} < 4^{100} < 4^{125} = 32^{50}$; c) $63^7 < 32^9 < 16^{12} < 18^{13}$, gdyż $63^7 < 64^7 = 2^{42}$, $32^9 = 2^{45}$, $16^{12} = 2^{48}$, $18^{13} > 16^{13} = 2^{52}$; d) $125^7 < 5^{24} < 2^{60} < 3^{48} < 81^{13} < 9^{28}$; e) $5^{300} < 9^{225} < 16^{180} < 8^{250} < 2^{800}$; f) $11^{40} < 2^{140} < 6^{60} < 3^{100} < 4^{80}$; g) $0^{100} < (0,1)^{20} < (0,3)^{20} < (0,1)^{10} < (0,3)^{10} < 10^9 < 9^{10}$.

2.

4. $11^{\frac{1}{2}}$, $4^{\frac{2}{3}}$, $13^{\frac{5}{4}}$, $2^{-\frac{1}{3}}$, $3^{-\frac{4}{5}}$, $7^{-\frac{3}{5}}$, $3^{\frac{3}{4}}$, $5^{-\frac{3}{5}}$.

5. $\sqrt[3]{25}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$, $\sqrt{7^5}$, $\sqrt{10^7}$, $\sqrt{\frac{1}{15}}$, $\sqrt[5]{13^2}$.

6. 5, 9, $\frac{4}{5}$, 64, 2, $\frac{5}{6}$.

7. $2^{\frac{3}{7}} < 3^{\frac{2}{7}}$, $2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, $100^{-\frac{1}{100}} < 1000^{-\frac{1}{1000}}$, $8^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{128}\right)^{-\frac{2}{7}}$.

8. a) $2^{-\frac{25}{12}}$; b) $3^{\frac{33}{4}}$.

9. a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} < 1 < 2^{\frac{1}{3}} < 2^3$; b) $2^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{4}} < 3^{\frac{1}{3}}$; c) $(2\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{4}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$.

10. a) $3 + 2^{\frac{3}{2}}$, $5 + 24^{\frac{1}{2}}$, $6 + 3\left(2^{\frac{4}{3}} + 2^{\frac{5}{3}}\right)$, 2; b) $2^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}}$, $-\frac{1}{6} - \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, 6, 2;

c) -1, -1; d) $x^{-2} - 1$, $-a^{-\frac{5}{3}} - a^{-\frac{4}{3}} - a^{-\frac{2}{3}} + a - 2a^{-1} + 2a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} + 1$.

11. a) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$; b) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$; c) $a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$; d) $a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$; e) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$;

f) $-(\sqrt{-a} + \sqrt{-b})$; g) $a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}$; h) $a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}$.

12. a) 2^5 ; b) 3; c) $1\frac{15}{16}$; d) 36; e) $2^{16} \cdot 5^{-2}$; f) $\frac{26}{81}$; g) 26.

13. a) 2; b) 6; c) $\frac{3}{2}$; d) $\frac{13}{5}$; e) -28 ; f) $-\frac{1}{8}$; g) 4; h) $-\frac{3}{2}$; i) $\frac{9}{4}$; j) 7; k) $\frac{1}{6}$.

14. a) $p > 1$; b) $p \geq 1$; c) $p \geq 0$; d) $p \leq -2$; e) $p \leq -1$; f) $p \geq 1$; g) $p \geq 1$; h) $p \leq -6$.

15. a) $\frac{1}{3}x$; b) $4xy$; c) $\frac{25a^6}{9b^2}$; d) $(a^4 - b^4)^{\frac{3}{4}}$; e) $a - b$; f) $a^{\frac{7}{8}} \cdot b^{-\frac{3}{8}}$.

16. a) $\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{-\frac{4}{5}} \cdot c^2$; b) $3b$; c) x ; d) $x^{\frac{5}{12}}$.

3.

1. a) $-2y$; b) $2ab$; c) $\frac{4}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$; d) 1.

2. a) $2(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})$; b) $\frac{1}{a^{\frac{m+1}{m}} - a^{\frac{n+1}{n}}}$; c) $\begin{cases} -3 & \text{dla } x > 9 \\ 3 - 2x^{\frac{1}{2}} & \text{dla } 0 \leq x < 9 \end{cases}$; d) $\frac{10}{1 + a^{\frac{1}{3}}}$.

3. a) $\sqrt{2}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; c) $|\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}}|$; d) $(\frac{a+b}{a-b})^{\frac{q+p}{q-p}}$; e) 0; f) 0,64; g) $\frac{n^2}{m^2}$.

4.

3. a) $2^{\sqrt{2}} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{\pi} < 2^{\frac{22}{7}} < 2^{3,2}$; b) $4 < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,5} < 3^{\sqrt{3}} < 3^{\pi}$.

4. a) mniejsza od 1; b) większa od 1; c) większa od 1.

5. a) $y > x$; b) $y > x$; c) $x > y$.

6. a) $12^{\sqrt{7}} = (2\sqrt{3})^{\sqrt{28}}$; b) $2^{\sqrt{2}} > \sqrt{2}^2$; c) $5^{\sqrt{3}} > 3^{\sqrt{5}}$; d) $\sqrt{5}^{\sqrt{3}} > \sqrt{3}^{\sqrt{5}}$; e) $7^{\sqrt{5}} > 5^{\sqrt{7}}$. Istotnie, bo $(7^{\sqrt{5}})^{\sqrt{5}} = 7^5 = 16805 > 15625 = 5^6 > 5^{\sqrt{35}} = (5^{\sqrt{7}})^{\sqrt{5}}$; f) $\sqrt{7}^{\sqrt{5}} > \sqrt{5}^{\sqrt{7}}$.

7. Niech $a \neq 1$. Wówczas mamy: $a^{xyz} = (a^x)^{yz} = (bc)^{yz} = (b^y)^z (c^z)^y = (ca)^z (ab)^y = a^{y+z} b^y c^z = a^{y+z} caab = a^{y+z+2} cb = a^{x+y+z+2}$, a stąd $xyz = x + y + z + 2$ i ostatecznie $x + y + z - xyz = -2$.

8. a) Gdy $a \geq b$, wówczas $\frac{a}{b} \geq 1$ i $a - b \geq 0$, więc $(\frac{a}{b})^{a-b} \geq 1$. Jeśli zaś $a < b$, to $\frac{a}{b} < 1$ i $a - b < 0$, więc $(\frac{a}{b})^{a-b} > 1$.

b) Wiadomo, że $\frac{a+b}{2} \geq (ab)^{\frac{1}{2}}$ dla $a \geq 0, b \geq 0$. Zatem, jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b} &\geq (ab)^{\frac{a+b}{2}} = (a^{a+b} b^{a+b})^{\frac{1}{2}} = (a^b b^a a^a b^b)^{\frac{1}{2}} = \\ &= (a^{2b} b^{2a} a^{a-b} b^{b-a})^{\frac{1}{2}} = (a^{2b} b^{2a})^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\right)^{\frac{1}{2}} = (a^b b^a) \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}} \geq (a^b b^a) \cdot 1 = a^b b^a, \end{aligned}$$

na mocy nierówności z podpunktu a).

c) Pierwszy sposób. Ponieważ $a^2 + b^2 \geq 2ab$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b , więc w szczególności dla liczb dodatnich a i b mamy:

$$\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^{a+b} \geq (ab)^{a+b} = a^{a+b} b^{a+b} = a^b b^a a^a b^b =$$

$$= a^{2b} b^{2a} \cdot a^{a-b} b^{b-a} = a^{2b} b^{2a} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b} \geq a^{2b} b^{2a}.$$

Drugi sposób. Wskazówka. Powołaj się na nierówność z podpunktu b).

d) Stosując nierówność pomiędzy średnią geometryczną ważoną i średnią harmoniczną ważoną liczb dodatnich a i b otrzymujemy: $(a^a b^b)^{\frac{1}{a+b}} \geq \frac{a+b}{a \cdot \frac{1}{a} + b \cdot \frac{1}{b}} = \frac{a+b}{2}$, czyli nie-

równość $a^a b^b \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}$, którą należało udowodnić.

9. Bez zmniejszenia ogólności rozumowania możemy przyjąć, że $a \geq b \geq c$. Ponieważ

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \Leftrightarrow a^{3a} b^{3b} c^{3c} \geq (abc)^{a+b+c} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^{3a - (a+b+c)} b^{3b - (a+b+c)} c^{3c - (a+b+c)} \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^{a-b+a-c} b^{b-a+b-c} c^{c-a+c-b} \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b} \left(\frac{b}{c}\right)^{b-c} \left(\frac{a}{c}\right)^{a-c} \geq 1, \text{ więc dowodzona nierówność, jest prawdziwa, gdyż ostatnia}$$

z powyższych nierówności równoważnych jest prawdziwa.

10. Jeśli $x \leq y$, wówczas $x^{\sin^2 \alpha} \cdot y^{\cos^2 \alpha} \leq y^{\sin^2 \alpha} \cdot y^{\cos^2 \alpha} = y^{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = y^1 = y < x + y$, gdyż $\sin^2 \alpha \geq 0$ i $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Gdy zaś $y < x$ – rozumujemy analogicznie.

11. Stosując nierówność między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną ważoną

$$\text{liczb dodatnich, otrzymujemy: } \frac{c \cdot a + a \cdot b + b \cdot c}{c + a + b} \geq (a^c b^a c^b)^{\frac{1}{a+b+c}},$$

$$\frac{b \cdot a + c \cdot b + a \cdot c}{b + c + a} \geq (a^b b^c c^a)^{\frac{1}{a+b+c}}, \frac{a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c}{a + b + c} \geq (a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}.$$

Po dodaniu tych nierówności stronami i skorzystaniu z założenia, że $a + b + c = 1$,

$$a^a b^b c^c + a^b b^c c^a + a^c b^a c^b \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2 = 1.$$

12. Nie zmniejszając ogólności rozumowania, możemy przyjąć, że $a \geq b$. Wówczas, gdy $a \geq 2$,

to $a^a \geq a^2$, więc $a^a + b^b > a^2 = a \cdot a \geq ab$. Jeśli zaś $2 > a \geq b$, wtedy oczywiście $a^a + b^b > a + b \geq 2\sqrt{ab} \geq ab$, bo $x^x > x$ dla $x > 0$. (Gdy $x > 1$, to $x^x - x = x(x^{x-1} - 1) > 0$,

gdy zaś $0 < x < 1$, to $\frac{1}{x} > 1$ i wtedy $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} > \frac{1}{x}$, skąd $x^x > x$).

5.

3. a) \mathbb{R} ; b) \mathbb{R} ; c) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; d) $\langle 0; +\infty \rangle$; e) $(0; +\infty)$; f) \mathbb{R} ; g) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; h) $(0; +\infty)$.

4. a) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; b) \mathbb{R}_+ ; c) $\langle 0; +\infty \rangle$; d) $\langle 0; +\infty \rangle$; e) \mathbb{R}_+ ; f) \mathbb{R}_+ ; g) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; h) $\langle 0; +\infty \rangle$.

5. a) Rośnie w $\langle 0; +\infty \rangle$, maleje w $(-\infty; 0)$; b) maleje w $(-\infty; 0)$ i $(0; +\infty)$; c) maleje w przedziałach $(-\infty; 0)$ i $(0; +\infty)$; d) maleje w przedziale $(0; +\infty)$.

7. a) Nie zachodzi; b) zachodzi; c) nie zachodzi; d) nie zachodzi.

6.

1. a) $-\frac{1}{8}$ lub $\frac{1}{8}$; b) $-2^{\frac{9}{8}}$ lub $2^{\frac{9}{8}}$; c) $\frac{9}{16}$; d) 8; e) $\{-1, 0, 1\}$; f) $\{0, 1\}$; g) $\{0, 1\}$; h) $\left\{0, \frac{8}{27}\right\}$.

2. a) 1, 512; b) $3\sqrt{10}$, $-3\sqrt{10}$, 5, -5 ; c) 4, -6 ; d) $-1, \frac{3}{2}$; e) $-2, 1$; f) 1.

3. a) $x \in (-\infty; 0) \cup (0, 1)$; b) $x \in (1; +\infty)$; c) $x \in \langle 1; +\infty \rangle$; d) $x \in \left\langle \frac{1-\sqrt{5}}{2}; 1 \right\rangle \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$; e) $x \in (1, +\infty)$; f) $x \in (1, +\infty)$.

4. a) Pierwszy sposób. Dana nierówność jest kolejno równoważna nierównościom:

$$2x^7 + 4x^4 - 2x^3 + x^4 + 2x - 1 < 2x^7 + 2x^5 + 2x^3 + 2x - x^2 - 1,$$

$$2x^5 - 5x^4 + 4x^3 - x^2 > 0, x^2(2x^3 - 5x^2 + 4x - 1) > 0,$$

$$x^2(x-1)(2x^2 - 3x + 1) > 0, 2x^2(x-1)(x-1) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) > 0, 2x^2(x-1)^2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) > 0.$$

Oczywiście $2x^2 > 0$, $(x-1)^2 > 0$ i $x - \frac{1}{2} > 0$, bo skoro $x > 1$, to $x - \frac{1}{2} > \frac{1}{2} > 0$.

Drugi sposób. Oznaczmy lewą i prawą stronę dowodzonej nierówności odpowiednio przez L i P . Zauważmy teraz, że $P - L = 2x^4 \cdot x^3 + 2x^4 \cdot x + \left(2 - \frac{1}{x}\right) \cdot x^3 + \left(2 - \frac{1}{x}\right) \cdot x - \left(2x^4 \cdot x^3 + 2x^4 \cdot \left(2 - \frac{1}{x}\right) + x \cdot x^3 + x \cdot \left(2 - \frac{1}{x}\right)\right) = 2x^4 \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right) + x^3 \left(2 - \frac{1}{x} - x\right) = \left(2x^4 - x^3\right) \left(x + \frac{1}{x} - 2\right)$. Ponieważ $2x^4 - x^3 > 0$ dla $x > 1$, zaś $x + \frac{1}{x} - 2 > 0$, nawet dla $x > 0$, więc dla $x > 1$ mamy nierówność $P - L > 0$, czyli nierówność $L < P$.

b) Pierwszy sposób. Dana nierówność jest równoważna kolejno nierównościom:

$$2x^5 + 4x^3 - 2x^2 + 2x^2 + 4 - \frac{2}{x} - 1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} <$$

$$< 2x^5 + 4x^3 - 2x + 2x^2 + 4 - \frac{2}{x^2} - x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}, 2x^2 - 3x + 1 > 0, 2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Ponieważ $x - 1 > 0$, więc także $x - \frac{1}{2} > 0$. Zatem istotnie $2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) > 0$.

Drugi sposób. Oznaczając lewą i prawą stronę dowodzonej nierówności odpowiednio przez L i P , zauważmy, że

$$P - L = 2x^3 \cdot x^2 + 2x^3 \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) + x^2 \left(2 - \frac{1}{x}\right) + \left(2 - \frac{1}{x}\right) \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) -$$

$$- \left(2x^3 \cdot x^2 + 2x^3 \left(2 - \frac{1}{x}\right) + x^2 \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) + \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) \left(2 - \frac{1}{x}\right)\right) =$$

$$= \left(2x^3 - x^2\right) \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^2 - 2x^3\right) \left(2 - \frac{1}{x}\right) > \left(2x^3 - x^2\right) \left(2 - \frac{1}{x}\right) + \left(x^2 - 2x^3\right) \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 0,$$

bo $-\frac{1}{x^2} > -\frac{1}{x}$ dla $x > 1$. Zatem $P - L > 0$, czyli $L < P$.

7.

6. Przyjmijmy, że argumenty x_1, x_2, x_3 tworzą ciąg arytmetyczny. Stąd $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$. Udowodnimy teraz, że odpowiadające tym argumentom wartości funkcji $f(x_1), f(x_2)$ i $f(x_3)$ tworzą ciąg geometryczny. Istotnie: $f^2(x_2) = (a^{x_2})^2 = a^{2x_2} = a^{x_1 + x_3} = a^{x_1} \cdot a^{x_3} = f(x_1) \cdot f(x_3)$. Zatem $f^2(x_2) = f(x_1) \cdot f(x_3)$, co kończy dowód faktu, że wartości funkcji $f(x)$ tworzą ciąg geometryczny.

7. Niech $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$. Wykażemy, że wówczas $a^{x_2} = \sqrt{a^{x_1} \cdot a^{x_3}}$. Istotnie:

$$a^{x_2} = a^{\frac{x_1 + x_3}{2}} = a^{\frac{x_1}{2} + \frac{x_3}{2}} = a^{\frac{x_1}{2}} \cdot a^{\frac{x_3}{2}} = \left(a^{x_1} \cdot a^{x_3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^{x_1} \cdot a^{x_3}}.$$

8. a)

$$\begin{aligned} 1) \quad f(x) + f(1-x) &= \frac{4^x}{4^x + 2} + \frac{4^{1-x}}{4^{1-x} + 2} = \frac{4^x}{4^x + 2} + \frac{\frac{4}{4^x}}{\frac{4}{4^x} + 2} = \\ &= \frac{4^x}{4^x + 2} + \frac{4}{4 + 2 \cdot 4^x} = \frac{2 \cdot 4^x}{2 \cdot 4^x + 4} + \frac{4}{4 + 2 \cdot 4^x} = \frac{2 \cdot 4^x + 4}{4 + 2 \cdot 4^x} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad f(x) + f(1-x) &= \frac{9^x}{9^x + 3} + \frac{9^{1-x}}{9^{1-x} + 3} = \frac{9^x}{9^x + 3} + \frac{\frac{9}{9^x}}{\frac{9}{9^x} + 3} = \\ &= \frac{9^x}{9^x + 3} + \frac{9}{9 + 3 \cdot 9^x} = \frac{3 \cdot 9^x}{3 \cdot 9^x + 9} + \frac{9}{9 + 3 \cdot 9^x} = \frac{9 + 3 \cdot 9^x}{9 + 3 \cdot 9^x} = 1. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 1) \quad f(0) + f\left(\frac{1}{2004}\right) + f\left(\frac{2}{2004}\right) + \dots + f\left(\frac{2003}{2004}\right) + f(1) &= \\ &= \frac{4^0}{4^0 + 2} + \frac{4^{\frac{1}{2004}}}{4^{\frac{1}{2004}} + 2} + \frac{4^{\frac{2}{2004}}}{4^{\frac{2}{2004}} + 2} + \dots + \frac{4^{\frac{2003}{2004}}}{4^{\frac{2003}{2004}} + 2} + \frac{4^1}{4^1 + 2}. \end{aligned}$$

Z równości $f(x) + f(1-x) = 1$ wynikają równości:

$$\frac{4^0}{4^0 + 2} + \frac{4^1}{4^1 + 2} = 1, \quad \frac{4^{\frac{1}{2004}}}{4^{\frac{1}{2004}} + 2} + \frac{4^{\frac{2003}{2004}}}{4^{\frac{2003}{2004}} + 2} = 1, \quad \frac{4^{\frac{2}{2004}}}{4^{\frac{2}{2004}} + 2} + \frac{4^{\frac{2002}{2004}}}{4^{\frac{2002}{2004}} + 2} = 1, \dots,$$

$$\frac{4^{\frac{1001}{2004}}}{4^{\frac{1001}{2004}} + 2} + \frac{4^{\frac{1003}{2004}}}{4^{\frac{1003}{2004}} + 2} = 1. \text{ Stąd wartość szukanej sumy wynosi:}$$

$$1002 + \frac{4^{\frac{1002}{2004}}}{4^{\frac{1002}{2004}} + 2} = 1002 + \frac{4^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}} + 2} = 1002 + \frac{2}{4} = 1002 \frac{1}{2}.$$

W analogiczny sposób obliczymy, że wartość danej sumy dla $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$ również wynosi $1002 \frac{1}{2}$.

8.

1. a) 3; b) 4; c) brak rozwiązań; d) 1, 6; e) 1; f) $\frac{2}{3}$.

2. a) $\frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$; b) $\frac{9}{10}$; c) $\frac{1}{3}$; d) 6; e) 1, 2; f) 1, 2.

3. a) 1; b) $\frac{3}{2}$; c) 2; d) 1; e) 1; f) $\frac{4}{5}$.
 4. a) 1,2; b) 2; c) 4; d) 4; e) -1; f) 0,1.
 5. a) $x < 0$; b) $x > 1$; c) $x \in (-\infty; 1) \cup \{5; +\infty\}$; d) $x > 0$; e) $x < 0$; f) $x \geq 0$.
 6. a) $\frac{3}{2}$; b) $x \leq 0$; c) $x > 0$; d) $x \in (2, 3)$; e) $x > 0$; f) $x < 2$.

9.

3. a) 2; b) -3; c) 4; d) $\frac{1}{4}$; e) $-\frac{1}{2}$; f) $\frac{3}{2}$; g) -1; h) $\frac{3}{2}$.
 4. a) 5; b) 25; c) $\sqrt[3]{3}$; d) 2; e) $\frac{9}{2}$; f) 16; g) 256; h) $\frac{9}{2}$.
 5. a) 81; b) 10^4 ; c) $\frac{1}{3}$; d) 10; e) $4 \vee -4$; f) $3 \vee -3$.
 6. a) 25; b) 3^{14} ; c) $\frac{1}{2}$; d) 3; e) 9; f) 0.
 7. a) 0; b) 0; c) 0.

8. 1. Istotnie, korzystając z własności logarytmu, otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} \frac{\log_6^2 3 + \log_6 16}{\log_6 3 \cdot \log_6 48 + \log_6^2 4} &= \frac{\log_6^2 3 + 4 \log_6 2}{\log_6 3 \cdot \log_6(3 \cdot 16) + \log_6^2 4} = \\ &= \frac{\log_6^2 3 + 4(\log_6 6 - \log_6 3)}{\log_6 3 \cdot (\log_6 3 + \log_6 16) + \log_6^2 4} = \frac{\log_6^2 3 - 4 \cdot \log_6 3 + 4}{\log_6^2 3 + \log_6 3 \cdot \log_6 16 + \log_6^2 4} = \\ &= \frac{(\log_6 3 - 2)^2}{\log_6^2 3 + 2 \log_6 3 \cdot \log_6 4 + \log_6^2 4} = \frac{(\log_6 3 - \log_6 36)^2}{(\log_6 4 + \log_6 3)^2} = \frac{\log_6^2 \left(\frac{1}{12}\right)}{\log_6^2 12} = \frac{\log_6^2 12}{\log_6^2 12} = 1. \end{aligned}$$

9. a) $\log_x n!$; b) $\frac{1 - \frac{1}{n}}{(\log_x 2)^2}$; c) $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \log_x a$.

10. $\log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}} = \frac{1}{3} \log_{ab} a - \frac{1}{2} \log_{ab} b = \frac{1}{3} \log_{ab} a - \frac{1}{2}(1 - \log_{ab} a) =$
 $= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \log_{ab} a - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \cdot 4 - \frac{1}{2} = \frac{20}{6} - \frac{3}{6} = \frac{17}{6}$.

11. $a^2 + b^2 = 7ab \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 9ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 9ab \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = ab \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{a+b}{3} = \sqrt{ab} \Leftrightarrow \log \frac{a+b}{3} = \log \sqrt{ab} \Leftrightarrow \log \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2} \log ab \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$.

12. $\frac{\log_a x - \log_b x}{\log_a x + \log_b x} = \frac{\frac{1}{\log_x a} - \frac{1}{\log_x b}}{\frac{1}{\log_x a} + \frac{1}{\log_x b}} = \frac{\log_x b - \log_x a}{\log_x b + \log_x a} = \frac{\log_x \frac{b}{a}}{\log_x ab} = \log_{ab} \left(\frac{b}{a}\right)$.

10.

5. a) $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; b) \mathbf{R} ; c) $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; d) $x \in (-1; 1)$; e) $x \in (0; 1) \cup (1; 2)$;
f) $x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

6. a) +; b) -; c) +; d) -; e) +; f) -; g) +; h) -.

7. a) Zauważmy, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n mamy:

$$f(2^n) = \log_3 2^n = n \log_3 2, \text{ a co za tym idzie:}$$

$$f(2^n) - f(2^{n-1}) = n \log_3 2 - (n-1) \log_3 2 = \log_3 2.$$

Ostatnia równość oznacza, że podany ciąg jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $\log_3 2$.

b) Ponieważ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n jest:

$f(a_n) - f(a_{n-1}) = \log_3 \frac{a_n}{a_{n-1}} = \log_3 q$, więc podany ciąg jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $\log_3 q$.

8. $f(\log_5 6) = \log_5 6 + \frac{1}{\log_5 6}$, $f(\log_5 4) = \log_5 4 + \frac{1}{\log_5 4}$.

Zbadajmy znak różnicy:

$$\begin{aligned} f(\log_5 6) - f(\log_5 4) &= \log_5 6 + \frac{1}{\log_5 6} - \log_5 4 - \frac{1}{\log_5 4} = \log_5 \frac{3}{2} + \frac{1}{\log_5 6} - \frac{1}{\log_5 4} = \\ &= \log_5 \frac{3}{2} - \frac{\log_5 6 - \log_5 4}{\log_5 6 \cdot \log_5 4} = \log_5 \frac{3}{2} - \frac{\log_5 2}{\log_5 6 \cdot \log_5 4} = \left(\log_5 \frac{3}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{\log_5 6 \cdot \log_5 4}\right). \end{aligned}$$

Zauważmy, że $\log_5 \frac{3}{2} > 0$, $\log_5 6 > 0$ i $\log_5 4 > 0$. Zatem na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną liczb $\log_5 6$ i $\log_5 4$:

$$\begin{aligned} \left(\log_5 \frac{3}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{\log_5 6 \cdot \log_5 4}\right) &< \left(\log_5 \frac{3}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{\log_5 6 + \log_5 4}{2}\right)^2}\right) = \\ &= \left(\log_5 \frac{3}{2}\right) \left(1 - \frac{4}{(\log_5 6 + \log_5 4)^2}\right) = \left(\log_5 \frac{3}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{(\log_5 24)^2}\right) < \left(\log_5 \frac{3}{2}\right) \left(1 - \frac{4}{(\log_5 25)^2}\right) = \\ &= \left(\log_5 \frac{3}{2}\right) \left(1 - \frac{4}{4}\right) = 0. \end{aligned}$$

10. a) $-\frac{4}{3}$; b) 3; c) $\frac{\sqrt{3}-3}{2}$; d) $-\frac{13}{9}$; e) 0. Wykres tej funkcji przecina osie OX i OY odpowiednio w punktach o współrzędnych $(-1; 0)$ i $(0; 1)$.

11. $f(x)$ rośnie dla $x \geq 1$, a maleje dla $0 < x \leq 1$.

11.

1. a) $\frac{1}{8}$; b) $\frac{1}{4}$; c) 3; d) 2, -2; e) $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$; f) $\frac{3}{2}$.

2. a) $\frac{1}{3}$; b) 2; c) 1; d) $\frac{1}{9}$; e) 4; f) $\pm \sqrt{\frac{2}{3}} - 1$.

3. a) $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$; b) 1; c) 2; d) 3; e) 2.
 4. a) 100, 1000; b) 4; c) -1; d) 4, 5.
 5. a) $x \in (0; 5)$; b) $x \in \left(0; \frac{1}{5}\right)$; c) $x \in (-2; 0) \cup (0; 2)$; d) $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$;
 e) $x \in (-3; 0) \cup (0; 3)$; f) $x \in (-3; 1)$; g) $x \in (1; 2)$; h) $x \in (0; 1)$.
 6. a) $x \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$; b) $x \in (1; 2\sqrt{2})$; c) $x \in \left(0; 2^{\frac{12}{11}}\right)$; d) $x \in \left(\frac{1}{27}; \frac{1}{3}\right)$.
 7. a) $x \in (-1; 1) \cup (3; 5)$; b) brak rozwiązań; c) $x \in (1; 3)$; d) $x \in (1; +\infty)$;
 e) $x \in (-2\sqrt{3}; -2) \cup (2; 2\sqrt{3})$; f) $x \in \left(-\infty; \frac{26}{25}\right) \cup (26; +\infty)$.

Rozdział II.

1.
 2. a) 9; b) $4 + 4\sqrt{2}$.
 3. a) 15; b) $\sqrt{34}$.
 4. Należy udowodnić, że: a) $AP + PB = AB$; b) $AP = PB$. Korzystając ze wzoru na odległość dwóch punktów, otrzymujemy:

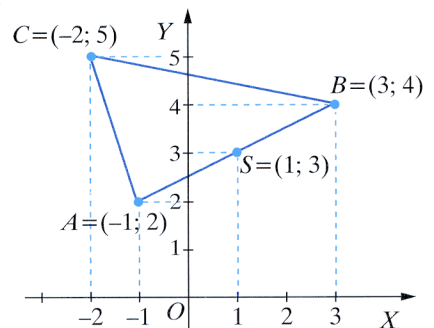
$$AP = \sqrt{\left(x_1 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \frac{1}{2} AB.$$

$$PB = \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_2\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2} - y_2\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \frac{1}{2} AB. \text{ Zatem } AP + PB = AB \text{ oraz } AP = PB.$$

5. Obliczmy długość środkowej trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C (ryc. 1). Długości pozostałych środkowych obliczymy analogicznie. Środek S odcinka AB ma współrzędne: $S = \left(\frac{-1 + 3}{2}, \frac{2 + 4}{2}\right) = (1; 3)$.
 Długość środkowej CS wynosi: $\sqrt{(-2 - 1)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$.

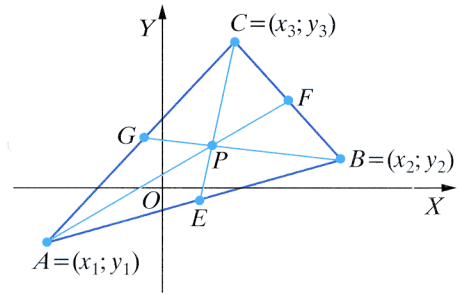


Ryc. 1.

6. $A = (x_1; y_1), B = (x_2; y_2), C = (x_3; y_3)$. Oczywiście
 $E = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right), F = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right), G = \left(\frac{x_3 + x_1}{2}, \frac{y_3 + y_1}{2}\right)$.

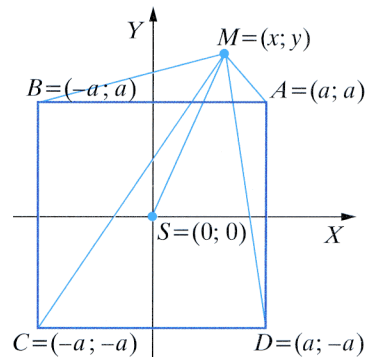
Punkt P dzieli każdą ze środkowych AF , BG , CE w stosunku 2:1 (ryc. 2).
Stąd otrzymujemy, że:

$$\begin{aligned}
 P &= \left(\frac{x_1 + 2 \cdot \frac{x_2 + x_3}{2}}{3}; \frac{y_1 + 2 \cdot \frac{y_2 + y_3}{2}}{3} \right) = \\
 &= \left(\frac{x_2 + 2 \cdot \frac{x_3 + x_1}{2}}{3}; \frac{y_2 + 2 \cdot \frac{y_3 + y_1}{2}}{3} \right) = \\
 &= \left(\frac{x_3 + 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{2}}{3}; \frac{y_3 + 2 \cdot \frac{y_1 + y_2}{2}}{3} \right) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right).
 \end{aligned}$$



Ryc. 2.

7. Obierzmy taki układ współrzędnych, aby jego osie były osiami symetrii boków kwadratu $ABCD$. Wówczas, gdy $A = (a; a)$, to $B = (-a; a)$, $C = (-a; -a)$, $D = (a; -a)$ i dla dowolnego $M = (x; y)$ otrzymujemy (ryc. 3):
 $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 - 4MS^2 = (x - a)^2 + (y - a)^2 + (x + a)^2 + (y - a)^2 + (x + a)^2 + (y + a)^2 + (x - a)^2 + (y + a)^2 - 4(x^2 + y^2) = 8a^2$. Istotnie więc, suma: $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 - 4MS^2$ jest stała dla każdego punktu M .



Ryc. 3.

8. Niech $A = (x_1; y_1)$, $B = (x_2; y_2)$, $C = (x_3; y_3)$. Wówczas długości środkowych wynoszą odpowiednio

$$\sqrt{\left(x_1 - \frac{x_2 + x_3}{2}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{y_2 + y_3}{2}\right)^2}, \sqrt{\left(x_2 - \frac{x_1 + x_3}{2}\right)^2 + \left(y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2}\right)^2},$$

$\sqrt{\left(x_3 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(y_3 - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2}$. Bez trudu sprawdzimy, że suma kwadratów tych środkowych jest równa

$$\frac{3}{4} \left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \right) + \left((x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 \right) + \left((x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 \right),$$

co kończy dowód.

2.

3. a) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 3$; b) $x^2 + (y + 2)^2 = 16$; c) $(x + 1)^2 + y^2 = 2$.

4. a) $S = (2; -1)$, $r = \sqrt{5}$; b) $S = (-3; 0)$; $r = 3$; c) $S = (0; 3)$, $r = 1$.

6. a) $x^2 + y^2 - 5x - 4y + 4 = 0$; $S = \left(\frac{5}{2}; 2\right)$; $r = \frac{5}{2}$; b) $x^2 - 4x + y^2 + 2y - 20 = 0$; $S = (2; -1)$;

$r = 5$.

7. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 61$.

8. a) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 68$; b) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 26$ lub $(x+3)^2 + (y-6)^2 = 26$;
 c) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$ lub $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$ lub $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$ lub
 $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 9$.
9. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 20$.
10. Wskazówka: Wyznacz promienie okręgów, odległość środków i skorzystaj z warunków styczności okręgów.
11. Wskazówka: Zauważ, że figura ta jest symetryczna względem osi układu XOY . Wystarczy narysować ją w I ćwiartce tego układu, a następnie odbić względem osi OX i OY .
 Odpowiedź: pole figury F wynosi $4\pi + 8$.
12. $P_1 = (4; 3)$, $P_2 = \left(-\frac{82}{17}; -\frac{39}{17}\right)$.
13. a) $x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$; b) $x^2 + y^2 = 1$.
- 3.
4. a) $x - 2y + 5 = 0$; b) $x + 2y = 0$; c) $x - y = 0$.
5. a) $x - y = 0$; b) $\sqrt{3}x - 3y + (3 + 2\sqrt{3}) = 0$; c) $x + y = 0$; d) $\sqrt{3}x + 3y + (3 + \sqrt{3}) = 0$.
6. a) $3x + 2y - 9 = 0$; b) $x + y - 1 = 0$; c) $x - y + 2 = 0$; d) $\sqrt{3}x - y + \sqrt{3} = 0$.
7. a) $x + y + 1 = 0$; b) $2x + y + 1 = 0$; c) $y + 1 = 0$; d) $x = 0$.
8. a) $AB: 2x - 3y - 8 = 0$; $BC: 2x + y - 8 = 0$; $CD: 2x - 3y + 8 = 0$; $DA: 2x + y = 0$;
 b) $AC: 6x - y - 8 = 0$; $BD: 2x + 5y - 8 = 0$.
9. a) Zauważmy, że prosta przechodząca przez punkty $(-3; 1)$, $(1; 3)$ wyraża się wzorem:
 $x - 2y + 5 = 0$. Bez trudu sprawdzimy, że punkt $(7; 6)$ należy do tej prostej, bo
 $7 - 2 \cdot 6 + 5 = 0$. b) Rozumowanie analogiczna jak w a).
- 4.
3. a) Proste o równaniach: $m_1x - y + n_1 = 0$, $m_2x - y + n_2 = 0$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $m_1 \cdot m_2 + (-1) \cdot (-1) = 0$, czyli gdy $m_1 m_2 + 1 = 0$; b) Proste o równaniach:
 $m_1x - y + n_1 = 0$ i $m_2x - y + n_2 = 0$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy
 $m_1 \cdot (-1) - m_2 \cdot (-1) = 0$, czyli gdy $m_1 = m_2$.
5. a) $3x - y - 1 = 0$, $y - 2 = 0$, $x + y - 3 = 0$; b) $7x - 3y - 2 = 0$, $x - 3y + 3 = 0$,
 $5x + 3y - 8 = 0$; c) $7x - 3y + 1 = 0$, $x - 3y + 9 = 0$, $5x + 3y - 17 = 0$; d) Wskazówka:
 Skorzystaj z twierdzenia o dwusiecznej.
6. a) Wskazówka: Napisz równania prostych zawierających środkowe danego trójkąta. Rozwiąż
 układ dowolnych dwóch spośród napisanych trzech równań. Sprawdź, że rozwiązanie tego
 układu jest jednocześnie rozwiązaniem trzeciego równania. W b), c), d) rozumuj analogicz-
 nie jak w a).
7. $B = (2; 7)$, $C = (4; 6)$, $D = (3; 4)$ lub $B = (0; 3)$, $C = (2; 2)$, $D = (3; 4)$.

5.

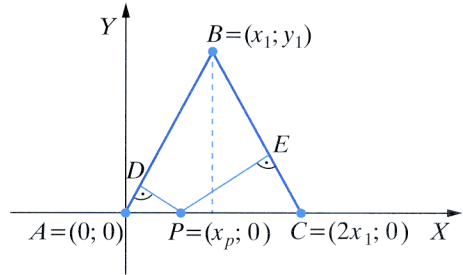
4. a) $\frac{6}{5}$; b) $5\sqrt{2}$; c) $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$.

5. $\frac{18\sqrt{58}}{29}$, $\frac{9\sqrt{10}}{5}$, $\frac{18\sqrt{34}}{17}$.

6. a) 1; b) 6.

7. $3x - 4y + 17 = 0$ i $3x - 4y - 13 = 0$.

8. Umieścimy dany trójkąt w układzie współrzędnych w ten sposób, by: $A = (0; 0)$, $B = (x_1; y_1)$, $C = (2x_1; 0)$; gdzie $x_1 > 0$ i $y_1 > 0$ (ryc. 4). Niech $P = (x_p; 0)$ będzie dowolnym punktem podstawy, zaś D i E rzutami prostokątnymi punktu P na ramiona odpowiednio AB i CB . Wówczas: $x y_1 - y x_1 = 0$ i $x y_1 + y x_1 - 2x_1 y_1 = 0$.



Ryc. 4.

$$\text{Stąd } PD = \frac{|y_1 x_p - x_1 \cdot 0|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}, \text{ zaś}$$

$$PE = \frac{|y_1 x_p + x_1 \cdot 0 - 2x_1 y_1|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}, \text{ czyli: } PD + PE = \frac{|y_1 x_p|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + \frac{|y_1 x_p - 2x_1 y_1|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}. \text{ Ponieważ}$$

$0 < x_p < 2x_1$, więc: $PD + PE = \frac{x_p y_1 - y_1 x_p + 2x_1 y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \frac{2x_1 y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$. Zatem rzeczywiście suma odległości punktu P od ramion trójkąta nie zależy od wyboru tego punktu.

6.

2. a) Dwa punkty wspólne; b) brak punktów wspólnych; c) brak punktów wspólnych; d) dwa punkty wspólne.

3. $\frac{24\sqrt{5}}{5}$.

4. $4x - 3y - 11 = 0$.

5. $y = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$; $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$.

6. $2\sqrt{10}$.

7. $12\frac{1}{2}$.

8. $16\frac{2}{3}$.

9. $12\frac{1}{2}$.

10. Sposób pierwszy. Zauważmy najpierw, że jeżeli końce odcinka AB mają obie współrzędne wymierne, to obie współrzędne wymierne ma także jego środek i wektor \vec{AB} . Wobec tego symetralna odcinka AB ma równanie o współczynnikach wymiernych. Dla znalezienia współrzędnych środka okręgu opisanego na trójkącie rozwiązujemy układ równań

symetrycznych dwóch boków tego trójkąta. Zatem, gdy współczynniki tych równań są wymierne, to rozwiązaniem takiego układu jest para liczb wymiernych. To zaś dowodzi tezy zadania.

Sposób drugi. Załóżmy, że w okrąg o środku $O(\alpha; \beta)$ wpisano trójkąt o wierzchołkach $A_1 = (p_1; q_1)$, $A_2 = (p_2; q_2)$; $A_3 = (p_3; q_3)$, gdzie $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$ są liczbami wymiernymi. Ponieważ $OA_1^2 = OA_2^2 = OA_3^2$, więc $(p_1 - \alpha)^2 + (q_1 - \beta)^2 = (p_2 - \alpha)^2 + (q_2 - \beta)^2 = (p_3 - \alpha)^2 + (q_3 - \beta)^2$. Z równań tych otrzymujemy układ:
$$\begin{cases} (p_2 - p_1)\alpha + (q_2 - q_1)\beta = r_1 \\ (p_3 - p_2)\alpha + (q_3 - q_2)\beta = r_2 \end{cases}$$

gdzie liczby $r_1 = \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2 - (p_1^2 + q_1^2))$ i $r_2 = \frac{1}{2}(p_3^2 + q_3^2 - (p_2^2 + q_2^2))$ są oczywiście wymierne. Wyznaczając z danego układu α i β , uzyskujemy $\alpha\Delta = r_1(q_3 - q_2) - r_2(q_2 - q_1)$, $\beta\Delta = r_2(p_2 - p_1) - r_1(p_3 - p_1)$, gdzie $\Delta = (p_2 - p_1)(q_3 - q_2) - (p_3 - p_2)(q_2 - q_1)$ i jest liczbą wymierną. Oczywiście $\Delta \neq 0$, w przeciwnym razie otrzymamy równości $\frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} = \frac{p_3 - p_2}{q_3 - q_2} = \frac{p_2 - p_1 + p_3 - p_2}{q_2 - q_1 + q_3 - q_2} = \frac{p_3 - p_1}{q_3 - q_1}$, które dowodzą, że punkty A_1, A_2, A_3 leżą na prostej o równaniu $y = q_1 + (x - p_1)\frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1}$, co jest niemożliwe, gdyż są one wierzchołkami trójkąta. Zatem $\Delta \neq 0$ i liczby $\alpha = \frac{r_1}{\Delta}(q_3 - q_2) - \frac{r_2}{\Delta}(q_2 - q_1)$, $\beta = \frac{r_2}{\Delta}(p_2 - p_1) - \frac{r_1}{\Delta}(p_3 - p_1)$ są wymierne wbrew założeniu. Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy zadania.

7.
2. a) P i Q leżą po tej samej stronie prostej l ; b) P i Q leżą po przeciwnych stronach prostej l .
5. $m \geq 2$.

Rozdział III.

1.

14. a) $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; b) $\sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$,

$$\cos 15^\circ = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

15. a) $\operatorname{tg} 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 75^\circ = 2 - \sqrt{3}$; b) $\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$.

16. a) $\sqrt{3}$; b) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

17. Oznaczmy przez D spodek wysokości opuszczonej z wierzchołka B . Wtedy:

$$\sphericalangle C = 90^\circ + \beta, DC = 2R \sin \alpha \cdot \sin \beta, AC = 2R \cos(\alpha + \beta),$$

$$AD = c \cdot \cos \alpha = 2R \cdot \sin C \cdot \cos \alpha = 2R \cos \alpha \cos \beta. \text{ Ponieważ } AC = AD - DC, \text{ więc}$$

$$2R \cos(\alpha + \beta) = 2R \cos \alpha \cos \beta - 2R \sin \alpha \sin \beta, \text{ skąd}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

18. W czworokącie tym zachodzą związki: $BD = 2R \sin \alpha$, $AC = 2R \cos \beta$, $CD = 2R \sin(\alpha - \beta)$, $AB = 2R$, $BC = 2R \sin \beta$, $AD = 2R \cos \alpha$. Z twierdzenia Ptolemeusza

wynika równość: $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$, która na mocy wspomnianych związków prowadzi do równości: $2R \cdot 2R \sin(\alpha - \beta) + 2R \sin \beta \cdot 2R \cos \alpha = 2R \cos \beta \cdot 2R \sin \alpha$, a w konsekwencji do wzoru na $\sin(\alpha - \beta)$.

2.

5. a) $2 \sin \frac{2\alpha + \pi}{4} \cos \frac{2\alpha - \pi}{4}$; b) $2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$; c) $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$;

d) $-\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$; e) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}$; f) $-\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}$; g) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2$.

6. a) $2\sqrt{2} \sin \frac{\pi - 2\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{2}$; b) $\frac{2\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos \alpha}$; c) $\frac{2\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin \alpha}$;

d) $2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}$; e) $2 \operatorname{ctg} \alpha \sin \frac{2\alpha + \pi}{4} \cos \frac{2\alpha - \pi}{4}$.

7. a) Ponieważ: $\sin 47^\circ - \sin 25^\circ = 2 \cos 36^\circ \sin 11^\circ$ oraz $\sin 61^\circ - \sin 11^\circ = 2 \cos 36^\circ \sin 25^\circ$,
więc $\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ - \cos 7^\circ =$

$$= 2 \cos 36^\circ (\sin 11^\circ + \sin 25^\circ) - \cos 7^\circ =$$

$$= 4 \cos 36^\circ \sin 18^\circ \cos 7^\circ - \cos 7^\circ = \frac{4 \cos 36^\circ \sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 7^\circ}{\cos 18^\circ} - \cos 7^\circ =$$

$$= \frac{2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} \cdot \cos 7^\circ - \cos 7^\circ = \left(\frac{\sin 72^\circ}{\cos 18^\circ} - 1 \right) \cos 7^\circ =$$

$$= \left(\frac{\sin 72^\circ}{\sin 72^\circ} - 1 \right) \cos 7^\circ = 0 \cdot \cos 7^\circ = 0;$$

b) $\sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$;

c) $\cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{3\pi}{5} = \frac{4 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{3\pi}{5}}{4 \cdot \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{2 \sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{3\pi}{5}}{4 \cdot \sin \frac{\pi}{5}} =$

$$= -\frac{2 \sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}}{4 \sin \frac{\pi}{5}} = -\frac{\sin \frac{4\pi}{5}}{4 \sin \frac{\pi}{5}} = -\frac{\sin \frac{\pi}{5}}{4 \sin \frac{\pi}{5}} = -\frac{1}{4};$$

d) $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} = 2 \cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5} = 2 \cos \frac{\pi}{5} \cos \left(\pi - \frac{3\pi}{5} \right) =$

$$= -2 \cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{3\pi}{5} = -2 \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2};$$

e) $\cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ = \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ =$

$$= \sin 60^\circ \cdot \sin 20^\circ \cdot \frac{1}{2} (\cos 40^\circ - \cos 120^\circ) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\sin 20^\circ \cdot \cos 40^\circ + \frac{\sin 20^\circ}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{8} (\sin 60^\circ - \sin 20^\circ + \sin 20^\circ) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{16};$$

f) $16 \sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = 8 \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ =$

$$= 8 \cdot \frac{\sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = 4 \cdot \frac{\sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\sin 80^\circ \cdot \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 1.$$

8. Z założenia: $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)c^2$, więc $c^2 = a^2 + b^2 - ab$ zaś z twierdzenia cosinów $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$. Stąd $\cos \gamma = \frac{1}{2}$, czyli $\gamma = 60^\circ$. Ponadto mamy $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{3}{4}$, czyli $\sin \alpha \sin (120^\circ - \alpha) = \frac{3}{4}$, $2 \sin \alpha \sin (120^\circ - \alpha) = \frac{3}{2}$, więc $\cos (2\alpha - 120^\circ) - \cos 120^\circ = \frac{3}{2}$, na mocy tożsamości $2 \sin x \sin y = \cos (x - y) - \cos (x + y)$. Wobec tego dalej mamy: $\cos (2\alpha - 120^\circ) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $\cos (2\alpha - 120^\circ) = 1$, $2\alpha - 120^\circ = 0^\circ$, $\alpha = 60^\circ$. Skoro $\alpha = 60^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, więc także $\beta = 60^\circ$. Trójkąt, w którym zachodzą podane związki jest zatem równoboczny.

3.

1. a) $\sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta$; b) $\sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta$; c) $\frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}$;

d) $-\frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$.

2. a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) 1; d) $\frac{\sqrt{6}}{8}$.

3. a) $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$; b) $\sin 2\alpha = \frac{120}{169}$, $\cos 2\alpha = -\frac{119}{169}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{120}{119}$, $\operatorname{ctg} 2\alpha = -\frac{119}{120}$; c) $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}$, $\cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -\frac{4}{3}$.

4. $\cos x = \frac{3}{5}$. Jeśli $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 2$, to $\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} = 4$. Stąd otrzymujemy dalej, co następuje:

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} - 1 = 3, \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 3 \sin^2 \frac{x}{2}, \cos x = 3 \sin^2 \frac{x}{2},$$

$$2 \cos x = 6 \sin^2 \frac{x}{2} = 3 - 3 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right), \quad 2 \cos x = 3 - 3 \cos x, \quad 5 \cos x = 3 \quad \text{i ostatecznie}$$

$$\cos x = \frac{3}{5}.$$

5. $\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}$ i $\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}}$ lub $\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}}$ i $\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}$.

6. a) $\sin \alpha + \sin (120^\circ + \alpha) + \sin (240^\circ + \alpha) =$
 $= (\sin (240^\circ + \alpha) + \sin \alpha) + \sin (120^\circ + \alpha) =$
 $= 2 \sin (120^\circ + \alpha) \cdot \cos 120^\circ + \sin (120^\circ + \alpha) =$
 $= 2 \sin (120^\circ + \alpha) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \sin (120^\circ + \alpha) = -\sin (120^\circ + \alpha) + \sin (120^\circ + \alpha) = 0;$

b) 0, wskazówka: rozumuj jak w punkcie a).

Uwaga. Wartości obu sum otrzymamy natychmiast, gdy zauważymy, że suma trzech wektorów jednostkowych, z których każde dwa tworzą kąt 120° , jest wektorem zerowym.

7. $(1 + \operatorname{tg} \alpha)(1 + \operatorname{tg} \beta) = 1 + (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta =$
 $= 1 + \operatorname{tg}(\alpha + \beta)(1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta) + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta =$

$$= 1 + 1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = 2 \text{ oraz}$$

$$(1 - \operatorname{ctg} \alpha)(1 - \operatorname{ctg} \beta) = 1 - (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) + \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta =$$

$$= 1 - \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)} + \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta = 1 - (\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1) + \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta =$$

$$= 1 - \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1 + \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta = 2.$$

8. Ponieważ $\alpha - \beta = 45^\circ$, więc $\alpha = \beta + 45^\circ$ i $\beta = \alpha - 45^\circ$. Zatem:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(\beta + 45^\circ) = \frac{\operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} 45^\circ} = \frac{\operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + 1},$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg}(\alpha - 45^\circ) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ + 1}{\operatorname{ctg} 45^\circ - \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha + 1}{1 - \operatorname{ctg} \alpha}.$$

9. Z podanej równości wynika, że $\sin \alpha = \frac{3}{2} \cos \alpha$. Ponieważ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, więc

$$1 = \left(\frac{3}{2} \cos \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha = \frac{13}{4} \cos^2 \alpha, \text{ skąd } \cos^2 \alpha = \frac{4}{13}. \text{ Wobec tego}$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \frac{8}{13} - 1 = -\frac{5}{13}.$$

10. a) $\sin \alpha \cdot \sin(\beta - \gamma) + \sin \beta \cdot \sin(\gamma - \alpha) + \sin \gamma \cdot \sin(\alpha - \beta) =$

$$= \sin \alpha (\sin \beta \cos \gamma - \sin \gamma \cos \beta) + \sin \beta (\sin \gamma \cos \alpha - \sin \alpha \cos \gamma) + \\ + \sin \gamma (\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha) = 0;$$

b) $\cos \alpha \cdot \sin(\beta - \gamma) + \cos \beta \cdot \sin(\gamma - \alpha) + \cos \gamma \cdot \sin(\alpha - \beta) =$

$$= \cos \alpha (\sin \beta \cos \gamma - \sin \gamma \cos \beta) + \cos \beta (\sin \gamma \cos \alpha - \sin \alpha \cos \gamma) + \\ + \cos \gamma (\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha) = 0;$$

c) Sposób pierwszy. Zauważmy najpierw, że

$$2 \cos \alpha \cdot \cos(120^\circ + \alpha) + 2 \cos(120^\circ + \alpha) \cos(240^\circ + \alpha) + 2 \cos(240^\circ + \alpha) \cos \alpha = \\ = \cos 120^\circ + \cos(120^\circ + 2\alpha) + \cos 120^\circ + \cos(360^\circ + 2\alpha) + \cos 240^\circ + \cos(240^\circ + 2\alpha) = \\ = -\cos 60^\circ + \cos(120^\circ + 2\alpha) - \cos 60^\circ + \cos 2\alpha - \cos 60^\circ + \cos(240^\circ + 2\alpha) = \\ = -3 \cos 60^\circ + \cos 2\alpha + \cos(120^\circ + 2\alpha) + \cos(240^\circ + 2\alpha) = \\ = -\frac{3}{2} + \cos 2\alpha + 2 \cos(180^\circ + 2\alpha) \cos 60^\circ = \\ = -\frac{3}{2} + \cos 2\alpha - 2 \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + \cos 2\alpha - \cos 2\alpha = -\frac{3}{2}.$$

Ponieważ $\cos \alpha + \cos(120^\circ + \alpha) + \cos(240^\circ + \alpha) = 0$, więc

$$\cos^2 \alpha + \cos^2(120^\circ + \alpha) + \cos^2(240^\circ + \alpha) = \\ = -2 \cos \alpha \cos(120^\circ + \alpha) - 2 \cos(120^\circ + \alpha) \cos(240^\circ + \alpha) - 2 \cos(240^\circ + \alpha) \cos \alpha = \\ = -\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Sposób drugi. $\cos^2 \alpha + \cos^2(\alpha + 120^\circ) + \cos^2(\alpha + 240^\circ) =$

$$= \frac{1}{2} (\cos 2\alpha + 1 + \cos(2\alpha + 240^\circ) + 1 + \cos(2\alpha + 480^\circ) + 1) = \\ = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} (\cos 2\alpha + \cos(2\alpha + 240^\circ) + \cos(2\alpha + 480^\circ)) = \frac{3}{2}.$$

d) Sposób pierwszy. Przyjmijmy oznaczenia: $x = \cos \alpha$, $y = \cos(120^\circ + \alpha)$,

$z = \cos(240^\circ + \alpha)$. Mamy obliczyć $x^4 + y^4 + z^4$. Wiemy już, że $x + y + z = 0$,

$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{2}$, $xy + yz + zx = -\frac{3}{4}$. Wobec tego

$$x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2 = (xy + yz + zx)^2 - 2xy \cdot yz - 2yz \cdot zx - 2zx \cdot xy =$$

$$= (xy + yz + zx)^2 - 2xyz \cdot (x + y + z) =$$

$$= (xy + yz + zx)^2 = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$

$$\text{Zatem: } x^4 + y^4 + z^4 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2) =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{9}{16} = \frac{9}{4} - \frac{9}{8} = \frac{9}{8}.$$

Sposób drugi. $\cos^4 \alpha + \cos^4(\alpha + 120^\circ) + \cos^4(\alpha + 240^\circ) =$

$$= \frac{1}{4} \left((\cos 2\alpha + 1)^2 + (\cos(2\alpha + 240^\circ) + 1)^2 + (\cos(2\alpha + 480^\circ) + 1)^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{4} (\cos^2 2\alpha + \cos^2(2\alpha + 240^\circ) + \cos^2(2\alpha + 480^\circ) +$$

$$+ 2(\cos 2\alpha + \cos(2\alpha + 240^\circ) + \cos(2\alpha + 480^\circ)) + 3) = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} + 2 \cdot 0 + 3 \right) = \frac{9}{8}.$$

11. a) $\frac{\sin \frac{k\alpha}{2} \cdot \cos \frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$, gdy $\alpha \neq 2t\pi$, zaś k , gdy $\alpha = 2t\pi$ dla $t \in \mathbb{C}$; b) $\operatorname{tg} n$.

Wskazówka: Zauważ, że dla $k = 1, 2, \dots, n$ mamy:

$$\frac{\sin 1}{\cos(k-1) \cdot \cos k} = \frac{\sin(k - (k-1))}{\cos(k-1) \cdot \cos k} = \frac{\sin k \cdot \cos(k-1) - \sin(k-1) \cdot \cos k}{\cos(k-1) \cdot \cos k} =$$

$$= \frac{\sin k \cdot \cos(k-1)}{\cos(k-1) \cdot \cos k} - \frac{\sin(k-1) \cos k}{\cos(k-1) \cdot \cos k} = \operatorname{tg} k - \operatorname{tg}(k-1); \text{ c) } \frac{\operatorname{tg} n}{\operatorname{tg} 1} - n, \text{ wskazówka: dla}$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, n-1, \text{ mamy: } \operatorname{tg} 1 = \operatorname{tg}((k+1) - k) = \frac{\operatorname{tg}(k+1) - \operatorname{tg} k}{1 + \operatorname{tg}(k+1) \cdot \operatorname{tg} k}, \text{ a stąd:}$$

$$1 + \operatorname{tg} k \cdot \operatorname{tg}(k+1) = \frac{\operatorname{tg}(k+1) - \operatorname{tg} k}{\operatorname{tg} 1}; \text{ d) } \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 2^n \alpha, \text{ o ile } \alpha \neq k \cdot \frac{\pi}{2^s},$$

($s = 0, 1, 2, \dots, n$; $k \in \mathbb{C}$). Wskazówka: Zauważ, że dla $s = 0, 1, 2, \dots, n$

$$\frac{1}{\sin 2^s \alpha} = \operatorname{ctg} 2^{s-1} \alpha - \operatorname{ctg} 2^s \alpha.$$

12. $\sin \alpha$. Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

13. Ponieważ $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, więc $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ i wówczas:

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \cos(\alpha - \beta) \cdot \cos \gamma - \cos^2 \gamma =$$

$$= \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \cos(\alpha - \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) - \cos^2 \gamma =$$

$$\begin{aligned}
&= \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) - \cos^2 \gamma = \\
&= \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 \alpha) + \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 \beta) - \cos^2 \gamma = \\
&= 1 - \cos^2 \gamma = \sin^2 \gamma. \text{ Wobec tego } \sin^2 \gamma = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin \gamma = -\frac{1}{2} \text{ lub } \sin \gamma = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \gamma = 150^\circ \text{ lub } \\
&\gamma = 30^\circ \text{ (bo } 0^\circ < \gamma < 180^\circ\text{)}. \text{ Odp. } \gamma = 30^\circ \text{ lub } \gamma = 150^\circ.
\end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned}
6. \text{ a) } \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma &= (\sin \alpha + \sin \beta) + \sin(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \\
&= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \\
&= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \\
&= 2 \sin \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2} \right) \cdot 2 \cos \frac{\frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2}}{2} \cdot \cos \frac{\frac{\alpha - \beta}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2}}{2} = \\
&= 2 \cos \frac{\gamma}{2} \cdot 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \left(-\frac{\beta}{2} \right) = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= (\cos \alpha + \cos \beta) + \cos(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \\
&= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \left(2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - 1 \right) = \\
&= 1 + 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} = 1 + 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \\
&= 1 + 2 \cos \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2} \right) \cdot 2 \sin \frac{\frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2}}{2} \sin \frac{\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}}{2} = \\
&= 1 + 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.
\end{aligned}$$

7. Z podanych w założeniu równości mamy: $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = a \cdot \cos(\alpha + \beta + \gamma)$ oraz $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = a \cdot \sin(\alpha + \beta + \gamma)$. Zatem, oznaczając sumę $\alpha + \beta + \gamma$ przez x , otrzymujemy: $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\beta + \gamma) + \cos(\gamma + \alpha) = \cos(x - \gamma) + \cos(x - \alpha) + \cos(x - \beta) = \cos x \cos \gamma + \sin x \cdot \sin \gamma + \cos x \cdot \cos \alpha + \sin x \cdot \sin \alpha + \cos x \cdot \cos \beta + \sin x \cdot \sin \beta = \cos x (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) + \sin x (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) = \cos x \cdot a \cdot \cos x + \sin x \cdot a \cdot \sin x = a (\sin^2 x + \cos^2 x) = a \cdot 1 = a$. Podobnie dowodzimy, że $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha) = 0$.

8. Przy oznaczeniach standardowych, na mocy twierdzenia sinusów, mamy równości: $a = 2R \sin \alpha$, $b = 2R \sin \beta$, $c = 2R \cos \gamma$. Zatem:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{2R \sin \alpha - 2R \sin \beta}{2R \sin \alpha + 2R \sin \beta} = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = \frac{2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}.$$

Podobnie dowodzimy pozostałych równości.

$$9. a) \operatorname{ctg} \gamma = \operatorname{ctg} \left[(2k+1) \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right] = \operatorname{ctg} \left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right] = \operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \\ = \frac{1}{\operatorname{ctg} (\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}. \text{ Stąd wynika dowodzona równość;}$$

$$b) \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \left[(2k+1) \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right] = \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right] = \operatorname{ctg} (\alpha + \beta) = \\ = \frac{1}{\operatorname{tg} (\alpha + \beta)} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}. \text{ Stąd wynika dowodzona równość.}$$

5.

$$4. b) x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ gdzie } k \in \mathbb{C};$$

$$c) x = \frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{4} \text{ lub } x = -\frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{2} \text{ lub } x = \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{2}, \text{ gdzie } k \in \mathbb{C};$$

$$d) x = \frac{\pi}{12} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{C}.$$

$$7. \text{ Wskazówka: Zauważ, że: } \left| \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \right| = \left| \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x}{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x} \right| = \left| \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

$$8. \text{ Mamy: } -4 \leq \cos 2x + 3 \sin x \leq \frac{17}{8} \Leftrightarrow -4 \leq 1 - 2 \sin^2 x + 3 \sin x \leq \frac{17}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{17}{8} \leq 2 \sin^2 x - 3 \sin x - 1 \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -17 \leq 16 \sin^2 x - 24 \sin x - 8 \text{ i } 2 \sin^2 x - 3 \sin x - 1 \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16 \sin^2 x - 24 \sin x + 9 \geq 0 \text{ i } 2 \sin^2 x - 3 \sin x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4 \sin x - 3)^2 \geq 0 \text{ i } 2(\sin x + 1) \left(\sin x - \frac{5}{2} \right) \leq 0.$$

9. Wskazówka: Zastosuj indukcję matematyczną względem n .10. Korzystając z tożsamości $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ i z nierówności z zadania 9, otrzymujemy:

$$|\cos nx - \cos ny| = \left| -2 \sin \left(n \cdot \frac{x+y}{2} \right) \sin \left(n \cdot \frac{x-y}{2} \right) \right| =$$

$$= 2 \cdot \left| \sin \left(n \cdot \frac{x+y}{2} \right) \right| \cdot \left| \sin \left(n \cdot \frac{x-y}{2} \right) \right| \leq 2n^2 \cdot \left| \sin \frac{x+y}{2} \right| \cdot \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| =$$

$$= n^2 \cdot \left| -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} \right| = n^2 |\cos x - \cos y|.$$

11. $a = 1$. Wskazówka: Ponieważ:

$$\operatorname{tg}^3 x + 1 = a (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x) \Leftrightarrow (\operatorname{tg} x + 1) (\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1) = a \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{tg} x + 1) (\operatorname{tg}^2 x - (a+1) \operatorname{tg} x + 1) = 0 \text{ i równanie } \operatorname{tg} x = -1 \text{ ma w przedziale } \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$$

jedno rozwiązanie (co wynika z własności funkcji tangens w tym przedziale), więc należy wyznaczyć te wartości a , dla których równanie $\operatorname{tg}^2 x - (a+1) \operatorname{tg} x + 1 = 0$ ma w tym przedziale jedno rozwiązanie, takie by $\operatorname{tg} x \neq -1$.

12. Cosinus jest funkcją parzystą, przyjmującą w przedziale $\langle -\pi; \pi \rangle$ jeden raz wartość 1 (dla $x = 0$) i dwa razy każdą wartość z przedziału $\langle -1; 1 \rangle$. Zatem podane w zadaniu równanie ma w tym przedziale trzy rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy równanie kwadratowe $y^2 + ay + b = 0$ (otrzymane przez podstawienie $y = \cos x$), ma dwa rozwiązania $y_1 = 1$ i $y_2 \in \langle -1; 1 \rangle$. To zaś zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy liczby a i b spełniają warunki: $a + b = -1$ i $-1 \leq b < 1$.

13. $a \in \left\langle -\frac{3}{4}; \frac{3}{4} \right\rangle$.

14. Ponieważ dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność

$$2(2 - \sin x)(3 - \sin x) > 0, \text{ więc } \frac{\sin x - 1}{\sin x - 2} + \frac{1}{2} \geq \frac{2 - \sin x}{3 - \sin x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1 - \sin x}{2 - \sin x} - \frac{2 - \sin x}{3 - \sin x} \geq 0 \Leftrightarrow \sin^2 x - 5 \sin x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (4 - \sin x)(1 - \sin x) \geq 0.$$

Oczywiście ostatnia z występujących tutaj nierówności zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej x , więc równoważna jej nierówność zadania, także jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x .

Rozdział IV.

2.

3. a) 1; b) 1; c) $+\infty$; d) 0; e) $+\infty$; f) $+\infty$.

4. a) 2; b) -2; c) $+\infty$; d) -1; e) 0; f) $+\infty$.

5. a) $\frac{1}{2}$; b) -2; c) 3; d) $+\infty$; e) 0; f) -1.

4.

3. a) $\frac{1}{16}$; b) $-\frac{12}{5}$; c) 2; d) -1.

4. a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) 0; d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) 3; f) 2; g) 4; h) $\frac{1}{2}$; i) 4.

6. a) 1; b) -1; c) 1; d) 0; e) $-\frac{1}{2}$; f) $-\frac{2}{3}$.

8. a) $-\frac{2}{\pi}$; b) $(-1)^{m-n} \cdot \frac{m}{n}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{\sqrt{2}}{8}$; e) -3; f) $-\frac{1}{12}$.

5.

4. a) Tak; b) nie.

6. Dla $a = -2$.

7. Ponieważ $\left[\frac{1}{x} \right] = \frac{1}{x} - \left\{ \frac{1}{x} \right\}$, więc $x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] = 1 - x \cdot \left\{ \frac{1}{x} \right\}$. Zatem

$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - x \cdot \left\{ \frac{1}{x} \right\} \right) = 1$ (dlaczego?). Wobec tego $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, co dowodzi, że funkcja f jest ciągła w $x_0 = 0$.

7.

3. Dla $a = \frac{1}{2}$.

4. Dla $a = \frac{2}{\pi} - 3$.

8. $a = \frac{1}{2}, b = 0, c = 1$. Ponieważ: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} a \cdot \frac{\sin ax}{ax} = a \cdot 1 = a$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - 1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x + 1}{x + 2} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + (b-1)x - b}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+b)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+b) = 1+b \text{ oraz}$$

$f(0) = \frac{1}{2}$ i $f(1) = c$, więc funkcja f jest ciągła w punkcie 0, gdy $a = \frac{1}{2}$, zaś – w punkcie 1, gdy $1+b = 1$ i $c = 1$, czyli gdy $b = 0$ i $c = 1$. Ciągłość funkcji f w przedziałach $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ i $(1; +\infty)$ dla dowolnych wartości a, b, c wynika z ciągłości odpowiednich funkcji elementarnych. Zatem podana funkcja jest ciągła w zbiorze \mathbf{R} dla $a = \frac{1}{2}, b = 0, c = 1$.

8.

9. Wielomian $W(x)$ ma pierwiastek rzeczywisty w przedziale $\left\langle 0; \frac{1}{2} \right\rangle \subset \langle 0; 1 \rangle$ dla każdej liczby rzeczywistej a , gdyż jest funkcją ciągłą, a ponadto $W(0) = -2$, zaś $W\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} \left[a^2 + \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{31}{4} \right]$, czyli $W(0) \cdot W\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.

10. Wielomian $f(x) = x^3 + (a+2)x^2 - x - 3a$ jest funkcją ciągłą w zbiorze \mathbf{R} , a ponadto $f(-a-3) = -a^2 - 8a - 6 < 0$, $f(-2) = a+2 > 0$, $f(0) = -3a < 0$, $f(2) = a+14 > 0$ dla każdego $a > 0$. Zatem w każdym z przedziałów: $(-a-3; -2)$, $(-2; 0)$, $(0; 2)$ ma pierwiastek rzeczywisty.

11. Przyjmijmy, że $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n$ i rozważmy funkcję

$$F(x) = \frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \dots + \frac{1}{x-a_n} = \frac{(x-a_2)\dots(x-a_n) + (x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_n) + \dots + (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n-1})}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}.$$

Funkcja $F(x)$ przyjmuje wartość 0 dla tych x , dla których przyjmuje ją wielomian $W(x) = (x-a_2)\dots(x-a_n) + (x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_n) + \dots + (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n-1})$.

Ponieważ $W(a_i) = (a_i - a_1)\dots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\dots(a_i - a_n)$ jest iloczynem $i-1$ liczb dodatnich oraz $n-i$ liczb ujemnych, zaś

$W(a_{i+1}) = (a_{i+1} - a_1)\dots(a_{i+1} - a_i)(a_{i+1} - a_{i+2})\dots(a_{i+1} - a_n)$ jest iloczynem i liczb dodatnich oraz $n-i-1$ liczb ujemnych, więc $W(a_i) \cdot W(a_{i+1}) < 0$. Wobec tego wielomian

$W(x)$ przyjmuje w każdym z przedziałów $(a_i; a_{i+1})$ wartość 0, co najmniej raz. Jest to wielomian stopnia $(n-1)$ -szego, więc może mieć nie więcej niż $n-1$ pierwiastków rzeczywistych, wobec tego w każdym z przedziałów $(a_i; a_{i+1})$ ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty. Stąd wynika teza zadania.

12. Wskazówka: Rozważ funkcję $h: \langle a; b \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ określoną wzorem: $h(x) = f(x) - g(x)$.
13. Wskazówka: Rozważ funkcję $h: \langle a; b \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ określoną wzorem: $h(x) = f(x) - x$.
14. Nie można. Wskazówka: Skorzystaj z zadania 13.
15. Skorzystamy z definicji Heinego ciągłości funkcji w punkcie. Oznaczmy: $h(x) = g(f(x))$ i rozważmy dowolny ciąg (x_n) argumentów funkcji f zbieżny do x_0 . Wykażemy, że $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = h(x_0)$. Ponieważ f jest ciągła w x_0 , więc $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) = y_0$, zaś g – jest funkcją ciągłą w $y_0 = f(x_0)$, więc $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = g(y_0)$, gdzie $y_n = f(x_n)$.
- Wobec tego:
- $$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = g(y_0) = g(f(x_0)) = h(x_0).$$
16. Wiemy, że suma i różnica funkcji ciągłych w przedziale są funkcjami ciągłymi w tym przedziale. Ponadto, jeśli funkcja $g(x)$ jest ciągła, to funkcja $g(ax)$ także jest ciągła. Wobec tego, zgodnie z podanym w zadaniu założeniem, funkcjami ciągłymi są funkcje $f(x) + f(2x)$ i $f(x) + f(4x)$, a co za tym idzie – również funkcja $f(2x) + f(4x)$. Ponieważ
- $$f(x) = \frac{1}{2}[(f(x) + f(2x)) + (f(x) + f(4x)) - (f(2x) + f(4x))],$$
- więc ciągła jest także funkcja $f(x)$.
17. Wskazówka: Rozważ funkcję $g(x) = f(7-x) + f(x) - 7$ dla $x \in \mathbf{R}$.
18. Wskazówka: Rozważ funkcję $g(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x)$ dla $x \in \mathbf{R}$.
19. Wskazówka: Rozważ funkcję $g(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x)$ dla $\langle 0; \frac{1}{2} \rangle$.
20. Oznaczmy: $f_+ = f + g$, $f_- = f - g$. Z treści zadania wynika, że f_- jest stałego znaku. Załóżmy (wbrew tezie), że także funkcja f_+ jest stałego znaku. Jeśli f_- i f_+ są obie zawsze dodatnie lub zawsze ujemne, wówczas funkcja $f = \frac{1}{2}(f_- + f_+)$ jest także albo stale dodatnia albo stale ujemna. Gdy zaś funkcje f_- i f_+ są przeciwnego znaku, wtedy funkcja $g = \frac{1}{2}(f_+ - f_-)$ jest stałego znaku. W obu przypadkach dostajemy sprzeczność z podanym w zadaniu założeniem, która kończy dowód tezy.
21. Z podanej w zadaniu równości wynika, że $f(999) = \frac{1}{999}$ i $f\left(\frac{1}{999}\right) = 999$. Skoro więc liczby $\frac{1}{999}$ i 999 są wartościami funkcji f , która jest ciągła, zaś $500 \in \left(\frac{1}{999}; 999\right)$, więc istnieje taka liczba $x_0 \in \left(\frac{1}{999}; 900\right)$, że $f(x_0) = 500$. Wracając z tym do równości $f(x) \cdot f(f(x)) = 1$, dostajemy: $f(x_0) \cdot f(f(x_0)) = 1$, czyli $500 \cdot f(500) = 1$, a stąd $f(500) = \frac{1}{500}$.
22. Gdyby funkcja f ciągła i różnowartościowa w przedziale P nie była w nim monotoniczna, wówczas istniałyby w tym przedziale liczby x_1, x_2, x_3 takie, że $x_1 < x_2 < x_3$ oraz

$f(x_1) < f(x_2)$ i $f(x_2) > f(x_3)$ lub $f(x_1) > f(x_2)$ i $f(x_2) < f(x_3)$. Ale wtedy na mocy wniosku z twierdzenia o zerowaniu się funkcji ciągłej, pewną wartość J_0 leżącą między $f(x_1)$ i $f(x_2)$ oraz $f(x_2)$ i $f(x_3)$ musiałaby funkcja f przyjąć w dwóch punktach: $x_4 \in (x_1; x_2)$ i $x_5 \in (x_2; x_3)$. To zaś przeczy różnowartościowości funkcji f w przedziale P . Otrzymana sprzeczność kończy dowód tezy zadania.

9.

7. a) $y = -x + 2$; b) $y = \frac{1}{4}x + 1$; c) $y = 3x + 2$; d) $y = -4x - 3$.10. a) $f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)$.12. Ze wzoru $f(ax) = b \cdot f(x)$ wynika, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$ zachodzi równość:

$$\frac{f(ax) - f(a \cdot 0)}{ax} = \frac{b \cdot f(x) - b \cdot f(0)}{ax}, \text{ czyli równość } \frac{f(ax) - f(0)}{ax} = \frac{b}{a} \cdot \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

Wobec tego $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(ax) - f(0)}{ax} = \frac{b}{a} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{b}{a} \cdot f'(0)$, skąd

$f'(0) = \frac{b}{a} \cdot f'(0)$ i ostatecznie $\frac{b}{a} = 1$, bo $f'(0) \neq 0$. Zatem $a = b$.

10.

4. Niech $k = \operatorname{tg} \alpha$, gdzie α jest kątem, o którym mowa w zadaniu. Wówczas zgodnie z podanym w zadaniu założeniem mamy:

$$k = f'(0) = g'(0) = \frac{f'(0) \cdot g(0) - f(0) \cdot g'(0)}{(g(0))^2}, \text{ a stąd: } k = \frac{k \cdot g(0) - k \cdot f(0)}{(g(0))^2}, \text{ czyli}$$

$g(0) - f(0) = (g(0))^2$, a co za tym idzie, $\frac{1}{4} - f(0) = \left(g(0) - \frac{1}{2}\right)^2$. Ponieważ $\left(g(0) - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, więc $\frac{1}{4} - f(0) \geq 0$, czyli $f(0) \leq \frac{1}{4}$.

11.

6. Jeśli $W(x) = (x - x_0)^2 \cdot V(x)$, to $W'(x) = 2(x - x_0) \cdot V(x) + (x - x_0)^2 \cdot V'(x) = (x - x_0) \cdot [2V(x) + (x - x_0)V'(x)]$ i widzimy że $W(x_0) = W'(x_0) = 0$. Załóżmy teraz, że $W(x_0) = W'(x_0) = 0$. Gdyby liczba x_0 była pierwiastkiem najwyżej jednokrotnym wielomianu $W(x)$, to oznaczałoby to (na mocy twierdzenia Bézouta), że $W(x) = (x - x_0) \cdot P(x)$ i $P(x_0) \neq 0$, gdzie $P(x)$ jest pewnym wielomianem. Jednak wówczas $W'(x) = P(x) + (x - x_0)P'(x)$, a co za tym idzie, $W'(x_0) \neq 0$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że x_0 musi być pierwiastkiem dwukrotnym wielomianem $W(x)$, dla którego jest $W(x_0) = W'(x_0) = 0$.

7. Wskazówka: Wystarczy sprawdzić, że $W_n(1) = W_n'(1) = 0$, gdyż $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$.

8. Wskazówka: Posłuż się metodą indukcji matematycznej.

9. $a = 3, b = -4$. Wskazówka: Rozwiąż układ równań $P(1) = 0$ i $P'(1) = 0$ z niewiadomymi a i b .
11. $m = 3, n = 3$ lub $m = 2$ i $n = 4$. Wskazówka: Z warunków zadania wynika, że musi być $n \geq 3$ i $f(1) = f'(1) = 0$.
- 12.
4. Dla $m > 3$.
5. a) $f'(x) = -x^{-2}(\cos x + x \sin x) < 0$ dla $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; b) $f'(x) = 2 - \cos 2x > 0$ dla $x \in \mathbf{R}$.
7. Wskazówka: Wykaż, że funkcja $f(x) = x^3 - x^2 + x$ jest rosnąca w zbiorze \mathbf{R} .
- 13.
9. a) -1 i $-\frac{4}{3}$; b) 11 i 2 ; c) 46 i -6 ; d) 2 i -2 .
10. $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$.
11. a) Wskazówka: Wykaż, że najmniejszą i największą wartością funkcji $f(x) = 3x - x^3$ w przedziale $\langle -2; 2 \rangle$ są odpowiednio liczby -2 i 2 .
c) Sposób pierwszy. Wskazówka. Wykaż, że najmniejszą i największą wartością funkcji $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$ w zbiorze \mathbf{R} są odpowiednio liczby $\frac{2}{3}$ i 2 .
Sposób drugi. Zauważ, że dla każdej liczby rzeczywistej x mamy:
$$\frac{2}{3} \leq \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \geq \frac{2}{3} \quad \text{i} \quad \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 + 1) \geq 2(x^2 + x + 1) \quad \text{i} \quad 2(x^2 + x + 1) \geq x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0 \quad \text{i} \quad x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0 \quad \text{i} \quad (x + 1)^2 \geq 0.$$
12. Zero ekstremów, gdy $a \geq \frac{1}{3}$ i b dowolne, jedno ekstremum, gdy $a = 0$ i b dowolne dwa ekstrema, gdy $(a < 0$ lub $0 < a < \frac{1}{3})$ i b dowolne.
13. $m \in (-\infty; -1)$.
- 14.
1. 3 i -3 .
2. a) i b) – kwadrat o boku długości 9 cm.
3. $4 \times 4 \times 2$.
4. Promień podstawy $r = 3$, tworzącą $l = 6$.
5. Trapez o podstawach długości 20 cm i 10 cm, oraz wysokości długości $5\sqrt{3}$ cm.
6. Boki powinny mieć długości: $\frac{27}{4}$ cm, $\frac{27}{4}$ cm, $\frac{18}{4}$ cm.
7. $\frac{2a\sqrt{2}}{5}$.
8. 4 .
9. Prostopadłościan o wymiarach: $\frac{2}{3}a \times \frac{2}{3}a \times \frac{h}{3}$.

Rozdział V.

1.

20. Rozważmy dowolną płaszczyznę α i n leżących na niej prostych l_1, l_2, \dots, l_n przecinających się w punkcie P . Na prostej k , przecinającej płaszczyznę α w punkcie P , obierzmy n punktów P_1, P_2, \dots, P_n . Prowadząc przez punkt P_i prostą m_i i równoległą do prostej l_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), otrzymamy n prostych m_1, m_2, \dots, m_n , z których każde dwie są skośne.
21. Na dowolnej płaszczyźnie α rozważmy okrąg i obierzmy na nim dowolnie n punktów. Następnie przez punkty te poprowadźmy proste równoległe, przecinające płaszczyznę α w tych punktach. Otrzymamy wówczas n prostych, z których żadne trzy nie leżą w jednej płaszczyźnie.
23. Wskazówka: Skorzystaj z twierdzenia o odcinku łączącym środki dwóch boków trójkąta.
25. Wskazówka: Zauważ, że punkty P, Q, R i S są wierzchołkami rombu.
26. Wskazówka: Wyraż długość tych odcinków w zależności od długości krawędzi tego czworoboku i skorzystaj z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa.

28. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

34. Na płaszczyźnie prostopadłej do odcinka AB , którego punktem wspólnym z nią jest jego środek.
35. Na płaszczyźnie dwusiecznej tego kąta, której krawędzią jest krawędź tego kąta.
36. i 37. Wskazówka: Skorzystaj z wzajemnego położenia prostych i płaszczyzn w przestrzeni.

2.

5. a) $W = 6, K = 9, S = 5$; b) $W = 8, K = 12, S = 6$; c) $W = 10, K = 15, S = 7$; d) $W = 12, K = 18, S = 8$; e) $W = 2n, K = 3n, S = n + 2$.
6. a) 3; b) 6; c) 10; d) 15; e) 36.
7. Pięciokąt i dwunastokąt.
8. $54(5 + 2\sqrt{6}) \text{ cm}^2$.
9. 56 cm.
10. $12(6 + \sqrt{2195}) \text{ cm}^2$.
11. $\frac{a^2(6 + \sqrt{3})}{2}$.
12. 6, 5 i 7.
15. $8\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
16. $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$ lub $a^2\sqrt{2}$.
17. $\frac{81\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$.
18. $\frac{3a^2\sqrt{7}}{2}$.

3.

5. a) $W = 4, K = 6, S = 4$; b) $W = 5, K = 8, S = 5$; c) $W = 6, K = 10, S = 6$; d) $W = 7, K = 12, S = 7$; e) $W = n + 1, K = 2n, S = n + 1$.

6. a) $W = 6, K = 9, S = 5$; b) $W = 8, K = 12, S = 6$; c) $W = 10, K = 15, S = 7$; d) $W = 12, K = 18, S = 8$; e) $W = 2n, K = 3n, S = n + 2$.
7. a) Trzy; b) cztery; c) pięć.
9. a) $a^2\sqrt{3}$; b) $a^2(1 + \sqrt{3})$.
10. $\frac{a^2(2 + \sqrt{5})\sqrt{3}}{4}$.
11. Wskazówka: Zauważ, że jeśli w podstawę ostrosłupa można wpisać okrąg o środku w spodku wysokości tego ostrosłupa, to wysokości ścian bocznych opuszczone na krawędzie podstawy są równe.
12. Wskazówka: Zauważ, że ściany boczne ostrosłupa ściętego prostego są trapezami o równych wysokościach.
- 4.
4. $6(3 + 2\sqrt{6}) \text{ cm}^2$.
5. $2\sqrt{2}, \sqrt{7}$.
6. Wskazówka: Wykaż najpierw, że równoległobok mający przekątnie równej długości jest prostokątem.
7. Wskazówka: Zauważ, że kąty te są równe odpowiednim kątom wewnętrznym pewnego trójkąta.
8. Wskazówka: Ściany tego ostrosłupa są parami przystające, można zatem wywnioskować że są one trójkątami równobocznymi.
9. $3\sqrt{3}(1 + \sqrt{13})$.
10. Teza zadania wynika z przystawiania trójkątów prostokątnych, których wspólną przyprostokątną jest wysokość ostrosłupa, zaś ich przeciwprostokątnymi – jego krawędzie boczne.
11. Teza zadania wynika z przystawiania trójkątów prostokątnych, których wspólną przyprostokątną jest wysokość ostrosłupa, ich przeciwprostokątnymi zaś – wysokości jego ścian bocznych, opuszczone na krawędzie podstawy.
12. Wskazówka: Wykaż, że przekątne podstawy są równej długości.
- 5.
1. $S_c = 6(3 + 2\sqrt{6}) \text{ cm}^2, V = 9\sqrt{6} \text{ cm}^3$.
2. $S_c = 14\sqrt{3} \text{ cm}^2, V = 6 \text{ cm}^3$.
3. $S_c = 3(2 + \sqrt{3}) \text{ dm}^2$.
4. $S_c = 48\sqrt{3} \text{ cm}^2, V = 32\sqrt{2} \text{ cm}^3$.
5. $S_c = (10 + 3\sqrt{55} + \sqrt{155}) \text{ cm}^2, V = 5\sqrt{11} \text{ cm}^3$.
6. $S_c = 12(4 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2, V = 36 \text{ cm}^3$.
7. Wskazówka: Wykaż najpierw, że w każdym równoległoboku suma kwadratów długości przekątnych jest równa sumie kwadratów długości jego boków.

8. Krawędź podstawy ma długość 3 cm, a krawędź boczna 2 cm.

9. $V = 36 \sqrt[4]{6} \text{ cm}^3$, $S_c = 72 \sqrt{2} \text{ cm}^2$.

10. $R = 13$.

11. $V = \frac{\sqrt{3}}{4} a^3 \sqrt{\frac{3}{4 \sin^2 \alpha} - 1}$, jeśli $0^\circ < \alpha < 60^\circ$.

6.

1. $\frac{81}{2} \text{ cm}^3$.

2. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$.

3. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$.

4. $V = \frac{1}{3} b^3 \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha$, gdzie $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$.

5. $V = \frac{2\sqrt{3}}{3} r^2 \sqrt{b^2 - \frac{4}{3} r^2}$, gdzie $r \in \left(0; \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)$.

6. $\text{tg } \varphi = \frac{\sqrt{2 \cos \alpha}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$.

7. Przy oznaczeniach jak na rycinie 5 mamy:

$$AC^2 = a^2 + b^2, BH^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2},$$

$$DH^2 = c^2 + BH^2 = \frac{a^2 c^2 + b^2 c^2 + a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Zatem:

$$\left(\text{pole } \triangle ACD\right)^2 = \frac{1}{4} (a^2 + b^2) \cdot \frac{a^2 c^2 + b^2 c^2 + a^2 b^2}{a^2 + b^2} =$$

$$= \left(\frac{ac}{2}\right)^2 + \left(\frac{bc}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab}{2}\right)^2 = \left(\text{pole } \triangle ABC\right)^2 + \left(\text{pole } \triangle ABD\right)^2 + \left(\text{pole } \triangle BCD\right)^2.$$

8. $S_b = \frac{a^2}{2} \sqrt{7 + 4\sqrt{2}}$.

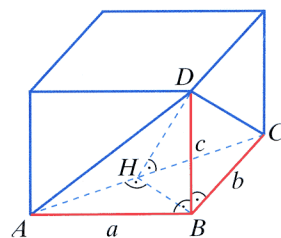
9. 8.

10. 6.

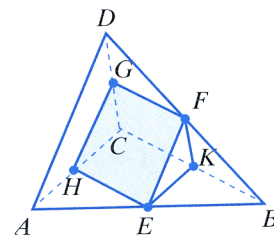
11. $V = 72 \sqrt{3} \text{ cm}^3$, $S_c = 216 \text{ cm}^2$.

12. $16 \sqrt{3}$.

13. Oznaczmy te środki odpowiednio przez E, F i G . Zauważmy, że płaszczyzna α wyznaczona przez te punkty przecina krawędź AC w jej środku (oznaczymy go przez H) (ryc. 6). Rzeczywiście, odcinek FG jest równoległy do krawędzi BC . Zatem prosta BC jest rozłączna z płaszczyzną α , a więc także z prostą HE . Płaszczyzna ta dzieli czworościan $ABCD$ na dwa pięciościany $HEFGBC$ i $HEFGAD$. Pięciościan $HEFGBC$ ma objętość równą sumie objętości dwóch brył:



Ryc. 5.



Ryc. 6.

- a) czworościanu $EFKB$ jednokładnego do czworościanu $ABCD$ w stosunku $\frac{1}{2}$ (a zatem mającego objętość równą $\frac{1}{8}$ objętości czworościanu $ABCD$);
 b) graniastostupa $HGCEFK$ mającego objętość trzy razy większą niż czworościan $EFKB$. Stąd wynika teza zadania.

7.

11. Nie.

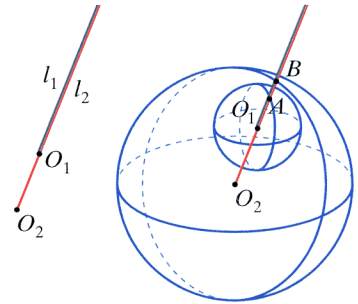
12. Nie.

13. Załóżmy, że kula o środku O_1 i promieniu r_1 jest zawarta w kuli o środku O_2 i promieniu r_2 . Wobec tego $r_1 \leq r_2$ i zachodzą dwa przypadki:

- a) środki O_1 i O_2 pokrywają się i wtedy rzeczywiście $O_1 O_2 = 0 \leq r_2 - r_1$;
 b) środki O_1 i O_2 są różne.

Poprowadźmy półprostą l_2 o początku w O_2 przechodzącą przez O_1 i półprostą l_1 o początku w O_1 i zawartą w l_2 (ryc. 7). Półprosta l_1 przecina sferę kuli mniejszej w punkcie A , półprosta l_2 zaś – sferę kuli większej w punkcie B . Oczywiście $O_1 A = r_1$, $O_2 B = r_2$.

Odcinek $O_1 A$ jest częścią wspólną kuli o środku O_1 , promieniu r_1 i półprostej l_1 , odcinek zaś $O_2 B$ – kuli o środku O_2 , promieniu r_2 i półprostej l_2 .



Ryc. 7.

Oczywiście $O_2 O_1 \leq r_2 - r_1 \Leftrightarrow O_2 O_1 + r_1 \leq r_2 \Leftrightarrow O_2 O_1 + O_1 A \leq O_2 B$. Ostatnia nierówność wynika stąd, że $\overline{O_1 A} \subset \overline{O_2 B}$ oraz odcinki $\overline{O_2 O_1}$ i $\overline{O_1 A}$ mają wspólny koniec O_1 i są zawarte w odcinku $\overline{O_2 B}$.

Założmy teraz, że $O_1 O_2 \leq r_2 - r_1$, czyli $O_1 O_2 + r_1 \leq r_2$. Dla dowolnego punktu P kuli o środku O_1 i promieniu r_1 zachodzi nierówność $PO_1 \leq r_1$. Ponieważ $PO_2 \leq PO_1 + O_1 O_2 = r_1 + O_1 O_2 \leq r_1 + r_2 - r_1 = r_2$, więc $PO_2 \leq r_2$, co dowodzi, że punkt P należy do kuli o środku O_2 i promieniu r_2 . Kula ta zawiera zatem kulę o środku O_1 i promieniu r_1 .

14. Odległość ich środków jest równa sumie ich promieni lub wartości bezwzględnej różnicy promieni tych sfer.
 15. Wskazówka: Zobacz zadanie 13.
 16. Do prostej łączącej środki kul K_1 i K_2 należą po dwa punkty sfer kul K_1 i K_2 . Odległość pewnych dwóch spośród tych punktów jest większa od sumy średnic tych kul.
 17. 45° .

8.

4. a) 5 razy i 25 razy; b) 3 razy; c) $n \cdot m$ razy i $n^2 \cdot m$ razy.5. k^2 razy i k^3 razy.

6. Zmniejszy się 2 razy.

7. Zmniejszy się 2 razy.

8. a) 4 razy; b) 8 razy.

9. $\frac{1000}{3\pi(0,7)^2} \frac{\text{cm}}{\text{s}} \approx 2 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

10. Około 6,5 cm i 12,7 cm.

11. $\frac{8}{81}\pi$.

12. $S_c = \frac{1125}{16}\pi \text{ cm}^2$, $V = \frac{1125\sqrt{15}}{64}\pi \text{ cm}^3$.

13. $\frac{48}{5}\pi$.

14. $\frac{1}{4} \cdot 64\pi(1 + \sqrt{2}) \text{ cm}^2$.

15. Około 0,00008 mm.

16. Około 229,3 dm³.

18. 24π .

19. Około 1255 cm² i 4182 cm³.

9.

1. $V = 2\pi r^3 \operatorname{tg} \alpha$, $S_c = 2\pi r^2(1 + 2 \operatorname{tg} \alpha)$.

2. a) 93π ; b) 105π .

3. $V = 6\pi$, $S_c = 2(3 + 2\sqrt{3})\pi$.

4. $S_c = \frac{\pi R^2(3 + 2\sqrt{3})}{4}$.

5. Krawędź podstawy ma długość 2, a krawędź boczna 3.

6. $S_b = 36$.

7. $V = 6\sqrt{3}$.

8. $V = \frac{9}{4}\sqrt{3}$.

9. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{2} \approx 55^\circ$.

10. $\operatorname{arc} \cos \frac{1}{3}$.

11. Pole tego przekroju wynosi $25\sqrt{2}$.

12. 3 razy.

Rozdział VI

1.

2. a) 5!; b) 9!; c) $(n-1)!$; d) $(n+2)!$; e) 8!; f) 10!; g) $\frac{1}{n}$; h) $(n-1)!$; i) 10; j) $n+1$; k) $n-4$; l) $n-k$.

3. a) 10; b) 56; c) $\frac{7}{5}$; d) $\frac{n}{n+2}$.

6. 5!.

7. 7!.

8. 6! · 4!.

9. 4 · 5!.

2.

$$2. \text{ b) } \binom{8}{5}; \binom{10}{8}; \binom{n}{n-2}; \binom{n+1}{k+2}; \binom{n+2}{n}.$$

$$3. \text{ a) } k \cdot \binom{n}{k} = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

$$\text{b) } \binom{n}{k} \cdot \binom{k}{l} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k!}{l!(k-l)!} = \frac{n!}{l!(n-l)!} \cdot \frac{(n-l)!}{(k-l)!(n-k)!} = \binom{n}{l} \binom{n-l}{k-l}.$$

$$7. \binom{5}{3}.$$

$$8. \binom{18}{3} \binom{12}{3}.$$

$$9. \frac{n(n-3)}{2}.$$

$$10. \binom{18}{7} \binom{11}{5} \binom{6}{4}.$$

11. 64.

$$12. \binom{8}{5} + \binom{8}{4} \cdot \binom{12}{2} + \binom{8}{3} \binom{12}{4} + \binom{8}{2} \binom{12}{6} + \binom{8}{1} \binom{12}{8} + \binom{12}{10}.$$

$$13. \binom{13}{5} \cdot 4 \cdot 39.$$

$$14. \binom{17}{3} \binom{3}{1} + \binom{17}{2} \binom{3}{2} + \binom{17}{1} \binom{3}{3}.$$

$$15. \text{ a) } \binom{9}{3} \binom{6}{3}; \text{ b) } 3 \cdot \binom{7}{2} + 2 \cdot \binom{5}{2}.$$

16. a) Na przykład: Wybierając z n osób k , zarazem odrzucamy pozostałe $(n-k)$ osób. Wobec tego k -elementowych kombinacji oraz $(n-k)$ -elementowych kombinacji tego samego zbioru n -elementowego musi być tyle samo. Stąd wynika podany wzór.

b) Na przykład: Z urny zawierającej $n+1$ kul, wśród których n kul jest białych i 1 czarna, wybieramy $k+1$ kul. Możemy to uczynić na $\binom{n+1}{k+1}$ sposobów. Ponieważ w tej liczbie $(k+1)$ -elementowych podzbiorów zbioru $n+1$ kul mamy $\binom{n}{k+1}$ podzbiorów niezawierających kuli czarnej i $\binom{n}{k}$ podzbiorów zawierających ją, więc rzeczywiście zachodzi równość: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.

c) Wzór ten wyraża (dwojako) liczbę wszystkich podzbiorów zbioru n -elementowego.

3.

$$3. 4^{10}.$$

$$4. 52^3.$$

5. $4 \cdot 4!$.

6. a) $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$; b) 8^4 .

7. $n^1 + n^2 + n^3 + \dots + n^n$.

4.

1. $12 + 12\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$.

2. $6(2 + \sqrt{3})$.

3. $4(3 + 3\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

4. n .

5. $\binom{3}{0}\binom{7}{4} + \binom{3}{1}\binom{7}{3}$.

6. 364.

7. $(k-1)(n-k)$.

8. $4 \cdot \binom{13}{8}\binom{39}{2}$.

9. 2^{n-1} .

10. $3\binom{n}{3} + n^3$.

11. 3^n .

12. $(2^{n-m} - 1)(2^m - 1)$.

5.

2. Zdarzeniem elementarnym jest trójwyrazowy ciąg wyników rzutu monetą, to znaczy: $\omega = (x_1, x_2, x_3)$, gdzie $x_i \in \{O, R\}$ oznacza wynik i -tego rzutu ($i = 1, 2, 3$).

Zatem $\Omega = \{\omega = (x_1, x_2, x_3); x_i \in \{O, R\}\}; |\Omega| = W_2^3 = 2^3 = 8$.

3. a) Zdarzeniem elementarnym jest nieuporządkowana para wyników. Są to pary: OO, OR, RR. Mamy więc tutaj 3 zdarzenia elementarne.

b) Zdarzeniami elementarnymi są tutaj nieuporządkowane pary wyników rzutu dwiema kostkami, a więc pary: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 22, 23, 24, 25, 26, 33, 34, 35, 36, 44, 45, 46, 55, 56, 66. Wszystkich zdarzeń elementarnych jest zatem 21.

4. Wynik turnieju zazwyczaj zapisuje się w postaci tabeli, gdzie 0 oznacza przegraną, zaś 1 – wygraną.

Na przykład wpisane do tabeli liczby 0 i 1 oznaczają wygraną A z B . Tabelę taką przyjmujemy za zdarzenie elementarne. Zbiór wszystkich takich tabel jest więc zbiorem zdarzeń elementarnych. Oczywiście tabel tych jest tyle, ile jest sześciowyrazowych ciągów o wyrazach równych 0 i 1 (dlaczego?), czyli $2^6 = 64$.

	A	B	C	D
A	X	1		
B	0	X		
C			X	
D				X

5. Zdarzeniem elementarnym jest tutaj trójelementowy podzbiór zbioru 30-elementowego (wybieramy 3 uczniów spośród 30). Zatem wszystkich zdarzeń elementarnych mamy

$C_{30}^3 = \binom{30}{3}$.

6. Każdemu pasażerowi przyporządkowujemy piętro, na którym wysiądzie. W ten sposób każdy rozkład wysiadań opisuje pewna funkcja określona na zbiorze pasażerów o wartościach w zbiorze pięter (ośmiowyrazowa wariacja z powtórzeniami zbioru dziesięcioelementowego) i przyjmujemy go za zdarzenie elementarne. Wszystkich zdarzeń elementarnych mamy więc tutaj 10^8 .

6.

5. $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n - 1$.

6. a) $A \cap B'$; b) $A' \cup B'$; c) $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$; d) $A' \cap B'$.

7. a) $(A \cap B) \cap C'$; b) $A \cup B \cup C$; c) $A' \cup B' \cup C'$;
d) $(A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)$.

8. a) $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3), (5, 6), (6, 5)\}$;

b) $\{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 2), (2, 5), (5, 2), (2, 6), (6, 2), (3, 1), (1, 3), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3), (3, 6), (6, 3), (5, 1), (1, 5), (5, 4), (4, 5), (5, 5), (5, 6), (6, 5)\}$;

c) $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$;

d) $\{(5, 1), (1, 5), (2, 5), (5, 2), (3, 5), (5, 3), (5, 4), (4, 5), (5, 5), (5, 6), (6, 5)\}$.

9. a) $\{(O, O, R), (O, R, O), (R, O, O), (R, R, O), (R, O, R), (O, R, R)\}$;

b) $\{(O, O, R), (R, O, O), (O, R, R), (R, R, O)\}$;

c) $\{(O, R, R), (R, O, R), (R, R, O), (O, O, R), (O, R, O), (R, O, O), (O, O, O)\}$;

d) $\{(O, O, O)\}$.

10. a) 0; b) 0; c) 0 lub 1; d) 0; e) 3; f) 1; g) 3.

11. a) Nie wylosowano trzech kul białych, nie wylosowano białej kuli, wylosowano co najmniej dwie kule białe; b) B ; c) wylosowano jakąkolwiek kulę (zdarzenie pewne); d) wylosowano trzy kule białe; e) wylosowano jedną kulę białą.

12. a) Zdarzenie pewne; b) zdarzenie pewne; c) zdarzenie niemożliwe.

7.

8. Ponieważ $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ i $B = A \cup (B \setminus A)$, więc $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$, stąd $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

9. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$, gdyż $P(A \cap B) \geq 0$, przy czym $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0$.

10. a) $\frac{11}{12}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{1}{12}$.

11. a) $\frac{7}{10}$; b) $\frac{3}{10}$; c) $\frac{9}{10}$.

12. Nie mogą.

13. Gdyby $A \cap B = \emptyset$, wtedy $P(A \cup B) > 1$, a to jest niemożliwe.

14. Ponieważ $0 \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) = 0 + 0 = 0$, więc $P(A \cup B) = 0$.

15. Ponieważ $1 \geq P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 1 + 1 - P(A \cup B) \geq 1$, więc $P(A \cap B) = 1$.

16. Mamy: $A \cap (A' \cap B) = \emptyset$ i $B \cap (B' \cap A) = \emptyset$ oraz

$$A \cup (A' \cap B) = (A \cup A') \cap (A \cup B) = \Omega \cap (A \cup B) = A \cup B,$$

$B \cup (B' \cap A) = (B \cup B') \cap (B \cup A) = \Omega \cap (A \cup B) = A \cup B$. Stąd wynika dowodzona równość.

17. Wskazówka: Zastosuj wzór: $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$, pisząc

$$P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C).$$

18. Korzystając ze wzoru z zadania 17, otrzymujemy na mocy podanych założeń:

$$\begin{aligned} 1 = P(\Omega) &= P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + \\ &+ P(A \cap B \cap C) = 6P(A) - 3P(A \cap B) + P(A \cap B \cap C) = \\ &= 6P(A) - 2P(A \cap B) - (P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C)) \leq 6P(A), \text{ czyli } 1 \leq 6P(A), \text{ skąd} \\ &P(A) \geq \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Ponadto:

$$\begin{aligned} 1 = P(\Omega) &= P(A \cup B \cup C) = 6P(A) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C) = \\ &= 4P(A) + 2P(A) - P(A \cap B) - [P(A \cap B) + P(C \cap A) - P((A \cap B) \cap (C \cap A))] = \\ &= 4P(A) + 2P(A) - P(A \cap B) - P((A \cap B) \cup (C \cap A)) = \\ &= 4P(A) + (P(A) - P(A \cap B)) + (P(A) - P((A \cap B) \cup (C \cap A))) \geq \\ &\geq 4P(A), \text{ gdyż } P(A) \geq P(A \cap B), \text{ bo } A \supset A \cap B, \text{ oraz } P(A) \geq P((A \cap B) \cup (C \cap A)), \\ &\text{ bo } A \supset (A \cap B) \cup (C \cap A). \text{ Zatem, istotnie } \frac{1}{6} \leq P(A) \leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

8.

3. $\frac{1}{4}$.

4. $\frac{7}{8}$.

5. $\frac{1}{4}$.

6. a) $\frac{2}{5}$; b) $\frac{2}{5}$; c) $\frac{1}{10}$.

7. $\frac{4}{13}$.

8. a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{2}{3}$.

9. $\frac{1}{3}$.

10. $\frac{1}{2}$.

9.

1. $\frac{1023}{1024}$.

2. $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{242}{243}$.

3. $\frac{5}{72}$.

4. $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6$.

5. $\frac{15}{16}$.

6. a) $\frac{2 \cdot \binom{18}{9}}{\binom{20}{10}}$; b) $1 - \frac{2 \cdot \binom{18}{9}}{\binom{20}{10}}$.

7. $\frac{567}{2 \cdot 5^6}$.

8. a) $\frac{n}{2n-1}$; b) $\frac{n}{2n-1}$; c) $\frac{n}{2(2n-1)}$.

9. $\frac{1}{3}$.

10. $\frac{1}{10}$.

11. $\frac{6}{35}$.

12. $\frac{4}{5}$.

13. $\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \frac{1}{3^n}$, gdy n jest liczbą parzystą; $\left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \frac{n}{3^n}$, gdy n jest liczbą nieparzystą.

14. $\frac{1}{3}$. Wskazówka: Zauważ, że suma czterech liczb całkowitych jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jedna z możliwości:

a) wszystkie cztery liczby są podzielne przez 3;

b) jedna z tych liczb jest podzielna przez 3, a pozostałe dają z dzielenia przez 3 tę samą niezerową resztę (1 lub 2);

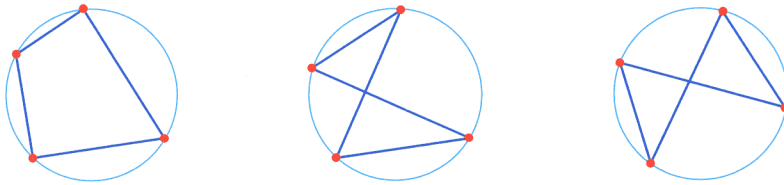
c) dwie z tych liczb są podzielne przez 3, a dwie pozostałe dają z dzielenia przez 3 różne niezerowe reszty;

d) dwie z tych liczb dają z dzielenia przez 3 resztę 1, a dwie pozostałe – resztę 2.

15. Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{b^2}{(b+c)^2} + \frac{c^2}{(b+c)^2}$ i rzeczywiście:

$$\frac{b^2 + c^2}{(b+c)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(b^2 + c^2)}{(b+c)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(b+c)^2 + (b-c)^2}{(b+c)^2} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{(b+c)^2}{(b+c)^2} = \frac{1}{2}.$$

16. $\frac{1}{3}$. Wskazówka: Zauważ, że istnieją trzy możliwe sposoby połączenia czterech punktów odcinkami (ryc. 8); z tych trzech łamanych tylko jedna jest brzegiem czworokąta wypukłego.



Ryc. 8.

17. $\frac{4}{3(n+2)}$. Wskazówka: Zauważ, że w urnie tej jest $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ kul;

dwie z nich możemy wybrać na $\binom{\frac{n(n+1)}{2}}{2} = \frac{1}{8} n(n+1)(n-1)(n+2)$ sposobów, zaś

dwie kule mające ten sam numer – na:

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3} = \frac{1}{6} (n+1)n(n-1) \text{ sposobów.}$$

10.

2. $\frac{1}{2}$.

3. a) $\frac{5}{12}$; b) $\frac{1}{12}$.

4. a) Mamy: $P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A)$;

b) Mamy: $P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} > \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$.

5. $P(A \cap B \cap C) = P((A \cap B) \cap C) = P(A \cap B) \cdot P(C|A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$.

6. $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)}{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)} \cdot \dots \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})}{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-2})} \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})} = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$.

7. 0.

8. a) $P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \leq \frac{P(C)}{P(C)} = 1$, gdyż $A \cap C \subset C$, a co za tym idzie

$$P(A \cap C) \leq P(C). P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \geq 0, \text{ gdyż } P(A \cap C) \geq 0.$$

b) Ponieważ $A \cap A' = \emptyset$ i $A \cup A' = \Omega$, więc

$$1 = P(\Omega | C) = P(A \cup A' | C) = P(A | C) + P(A' | C).$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(A \cup B | C) &= \frac{P((A \cup C) \cap C)}{P(C)} = \frac{P((A \cap C) \cup (B \cap C))}{P(C)} = \\ &= \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C) - P((A \cap B) \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} + \frac{P(B \cap C)}{P(C)} - \frac{P((A \cap B) \cap C)}{P(C)} = \\ &= P(A | C) + P(B | C) - P(A \cap B | C). \end{aligned}$$

9. $\frac{7}{9}$. Wskazówka: Skorzystaj z zadania 8.b).

10. $\frac{1}{3}$.

11.

3. $\frac{2}{7}$.

4. $\frac{4}{9}$.

5. $\frac{2}{5}$.

6. $\frac{17}{36}$.

7. $\frac{1}{5n} \left(1 - \frac{1}{6^n}\right)$.

8. $\frac{13}{33}$.

9. $\frac{n^2 - 3n + 3}{n(n-1)}$.

10. 0,43.

11. 0,969.

12. $\frac{2}{3}$.

12.

4. A i B są niezależne.

5. A i B są zależne.

6. A i B są zależne.

7. A i B są zależne.

8. Dla dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ mamy:

$$\text{a) } P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A) \cdot 1 = P(A) \cdot P(\Omega);$$

$$\text{b) } P(A \cap \emptyset) = P(\emptyset) = 0 = P(A) \cdot 0 = P(A) \cdot P(\emptyset).$$

9. Ponieważ $A \cap B = \emptyset$ i $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, więc $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A) \cdot P(B)$.

10. a) Mamy: $P(B) = P(\Omega \cap B) = P((A \cup A') \cap B) = P((A \cap B) \cup (A' \cap B)) =$
 $= P(A \cap B) + P(A' \cap B) = P(A) \cdot P(B) + P(A' \cap B)$, gdyż $(A \cap B) \cap (A' \cap B) = \emptyset$
 oraz $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Zatem $P(A' \cap B) + P(A) \cdot P(B) = P(B)$, skąd
 $P(A' \cap B) = P(B) - P(A) \cdot P(B) = (1 - P(A)) \cdot P(B) = P(A') \cdot P(B)$.

b) Skoro zdarzenia A i B są niezależne, to na podstawie a) zdarzenia (A') i B' , czyli zdarzenia A i B' także są niezależne.

c) Sposób pierwszy. Ponieważ $A' \cap B' = (A \cup B)'$ (I prawo de Morgana) oraz
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) =$
 $= P(A) + P(B)(1 - P(A)) = P(A) + P(A') \cdot P(B)$, więc:
 $P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(A') \cdot P(B) = P(A') - P(A') \cdot P(B) =$
 $= P(A')(1 - P(B)) = P(A') \cdot P(B')$.

Sposób drugi. Skorzystaj z a) i b).

11. Sposób pierwszy. Korzystając z łatwej do udowodnienia własności proporcji:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$ dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} P(A|B) = P(A|B') &\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B) + P(A \cap B')}{P(B) + P(B')} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow \frac{P((A \cap B) \cup (A \cap B'))}{P(B \cup B')} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{P(A \cap (B \cup B'))}{P(\Omega)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap \Omega)}{1} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B). \end{aligned}$$

Sposób drugi. Ponieważ $P(B') = 1 - P(B)$ oraz $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$, więc

$$\begin{aligned} P(A|B) = P(A|B') &\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(A \cap B) \cdot P(B') = P(A \cap B') \cdot P(B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(A \cap B)(1 - P(B)) = (P(A) - P(A \cap B)) \cdot P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \end{aligned}$$

12. Ponieważ $A \cap B = \emptyset$ i $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, więc

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0 \text{ lub } P(B) = 0.$$

13.

2. $\Omega = \{\omega = (m_1, m_2, \dots, m_n); m_i = 0 \text{ lub } m_i = \mathbf{R}\}$.

$$|\Omega| = 2^n.$$

$A_k = \{\omega = (m_1, \dots, m_{k-1}, \mathbf{R}, m_{k+1}, \dots, m_n); m_i = 0 \text{ lub } m_i = \mathbf{R}, i \neq k, i = 1, 2, \dots, n\}$.

Zatem $P(A_k) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$, dla $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Dla każdego k takiego, że $2 \leq k \leq n$

mamy $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \frac{2^{n-k}}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^k = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2}}_k = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$,

co dowodzi niezależności zdarzeń A_1, A_2, \dots, A_n .

3. a) Wskazówka: $|A_k| = 6^{n-1}$, zaś $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = 6^{n-k}$. b) Wskazówka: $|A_k| = 3 \cdot 6^{n-1}$,
zaś $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = 3^k \cdot 6^{n-k}$.

4. Nie mogą.

5. Mamy:

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \cap C) &= P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) = \\ &= P(A) \cdot P(C) + P(B) \cdot P(C) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \\ &= (P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)) \cdot P(C) = (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \cdot P(C) = \\ &= P(A \cup B) \cdot P(C). \end{aligned}$$

6. Niech $P(A) = P(B) = P(C) = p$. Wówczas: $P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(C \cap A) = p^2$, zaś $P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0$. Wobec tego $P(A \cup B \cup C) = 3p - 3p^2$. Ponieważ jednocześnie $P(A \cup B \cup C) \geq P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A) \geq 3p^2$, więc $3p - 3p^2 \geq 3p^2$, skąd $p \leq \frac{1}{2}$, przy czym $p = \frac{1}{2}$, gdy rzucamy dwa razy monetą i zdarzeniami A, B, C będą odpowiednio zdarzenia: $A = \{(R, R), (R, O)\}$, $B = \{(R, O), (O, O)\}$, $C = \{(O, O), (R, R)\}$.

7. Niech A_i będzie zdarzeniem: „ i -ty strzał był celny”. $i = 1, 2, \dots, n$. Z założenia wynika, że zdarzenia A_1, A_2, \dots, A_n są niezależne, więc zdarzenia A_1', A_2', \dots, A_n' także są niezależne (wykaż to!).

$$\begin{aligned} \text{Wobec tego } P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) &= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n) = \\ &= (1 - P(A_1'))(1 - P(A_2')) \cdot \dots \cdot (1 - P(A_n')) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

8. Ponieważ:

$$\begin{aligned} P(A \cap (B \cup C)) &= P(A) \cdot P(B \cup C) = P(A) \cdot (P(B) + P(C) - P(B \cap C)) \text{ oraz} \\ P(A \cap (B \cup C)) &= P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C), \text{ więc} \\ P(A)(P(B) + P(C) - P(B \cap C)) &= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C), \text{ czyli} \\ (*) P(A) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(C) &= P(A \cap B) + P(A \cap C) \end{aligned}$$

Ponadto:

$$P(B) \cdot P(A \cap C) = P(B \cap (A \cap C)) = P(A \cap B \cap C) = P(C \cap (A \cap B)) = P(C) \cdot P(A \cap B),$$

więc

$$(**) P(A \cap C) = P(C) \cdot \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Wracając z tym do równości (*), dostajemy:

$$P(A)(P(B) + P(C)) = P(A \cap B) + P(C) \cdot \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ stąd } P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B).$$

Podstawiając to do równości (**), otrzymujemy:

$$P(A \cap C) = P(C) \cdot \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A) \cdot P(C).$$

Wobec tego

$$P(B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A)} = \frac{P(C \cap (A \cap B))}{P(A)} = \frac{P(C) \cdot P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \cdot P(C) \text{ oraz}$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) \cdot P(C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

14.

1. $\frac{799}{800}$.
2. a) 0,7221; b) 0,9779; c) 0,0221.
3. 0,18.
4. 0,06.
5. a) 0,612; b) 0,003.
6. Przy użyciu dwóch złączonych zapalek.
7. 0,64.

15.

3. Jest to schemat 5 prób Bernoulliego, w którym $p = \frac{1}{6}$. Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{763}{3888}$.
4. Jest to schemat 9 prób Bernoulliego, w którym $p = \frac{1}{2}$. Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{21}{32}$.
5. Jest to schemat 12 prób Bernoulliego, w którym $p = \frac{1}{3}$.
 - a) $P_{12}(6) + P_{12}(7) + P_{12}(8) + P_{12}(9) + P_{12}(10) + P_{12}(11) + P_{12}(12) =$
 $= \binom{12}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^6 \left(\frac{2}{3}\right)^6 + \binom{12}{7} \left(\frac{1}{3}\right)^7 \left(\frac{2}{3}\right)^5 + \binom{12}{8} \left(\frac{1}{3}\right)^8 \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \binom{12}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^9 \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \binom{12}{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \left(\frac{2}{3}\right)^2 +$
 $+ \binom{12}{11} \left(\frac{1}{3}\right)^{11} \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{12}{12} \left(\frac{1}{3}\right)^{12}.$
 - b) $P_{12}(0) + P_{12}(1) + P_{12}(2) + P_{12}(3) =$
 $= \binom{12}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{12} + \binom{12}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^{11} + \binom{12}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{10} + \binom{12}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^9.$
6. Zdarzenie: „osiągnięcie co najmniej jednego sukcesu” jest przeciwne do zdarzenia: „poniesienie samych porażek”. Stąd $p = 1 - \frac{1}{4\sqrt{2}}$.

7. Jest to schemat 12 prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem $p = 0,8$ sukcesu w jednej próbie. Zajeżdźnia funkcjonuje normalnie, jeśli kursuje co najmniej 8 tramwajów, czyli gdy sukces zajdzie co najmniej 8 razy. Wobec tego szukane prawdopodobieństwo jest równe:

$$P_{12}(8) + P_{12}(9) + P_{12}(10) + P_{12}(11) + P_{12}(12) = \binom{12}{8}(0,8)^8(0,2)^4 + \binom{12}{9}(0,8)^9(0,2)^3 + \\ + \binom{12}{10}(0,8)^{10}(0,2)^2 + \binom{12}{11}(0,8)^{11}(0,2)^1 + \binom{12}{12}(0,8)^{12} \approx 0,93.$$

16.

1. 16.

2. 10.

3. 49 i 50.

4. 45.

17.

23. Wskazówka: Zauważ, że dla każdego $k = 1, 2, 3, \dots, n$ zachodzi nierówność

$$|x_k - \bar{x}| \leq |x_{\max} - x_{\min}|, \text{ gdzie } x_{\max} \text{ i } x_{\min} \text{ oznaczają odpowiednio największą i najmniejszą z liczb } x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Literatura pomocnicza

- W. Bednarek, *Szkice o liczbach, funkcjach i figurach*, Toruń 2003.
- N. Dróbka, K. Szymański, *Matematyka. Klasa 1. Zbiór zadań*, Warszawa 2002.
- B. Gdowski, E. Pluciński, *Zadania z rachunku wektorowego i geometrii analitycznej*, Warszawa 1994.
- B. Gdowski, E. Pluciński, *Zbiór zadań z matematyki dla kandydatów na wyższe uczelnie*, Warszawa 1994.
- N. Kałużska, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka dla szkół średnich*, Warszawa 1997.
- L. Kourliandtczik, *Etiudy matematyczne*, Toruń 2001.
- L. Kourliandtczik, *Impresje matematyczne*, Toruń 2002.
- W. Krysiński, W. Czapliński, J. E. Roguski, T. Stanisławski, T. Świątkowski, W. Terlikowski, *Tematy egzaminów wstępnych z matematyki na wyższe uczelnie*, Warszawa 1987
- W. Leksiński, B. Macukow, W. Żakowski, *Matematyka dla maturzystów*, Warszawa 1999.
- P. I. Pasiczenko, *Zadania z matematyki. Algebra*, Moskwa 1987.
- W. Szlenk, *Rachunek Prawdopodobieństwa dla klasy IV LO i Technikum*, Warszawa 1999.
- W. W. Wawilow, I. I. Mielnikow. S. N. Olicznik, *Zadania z matematyki. Algebra*, Moskwa 1987.

Przy opracowywaniu podręcznika skorzystano z następujących pozycji:

- M. I. Abramowicz, M. T. Starodubcew, *Matematika (Geometria i trygonometryczeskije funkcji)*, Moskwa 1976.
- B. Gdowski, E. Pluciński, *Zadania i testy z matematyki dla uczniów szkół średnich. Klasa I i II*, Warszawa 1995.
- M. Hornowski, M. Pęczalski, *Zbiór zadań algebraicznych, klasy VIII–IX*, Warszawa 1962.
- S. Kartasiński, M. Okołowicz, *Zbiór zadań maturalnych i egzaminacyjnych, cz. I–II*, Warszawa 1962–1967.
- S. Kartasiński, M. Okołowicz, T. Stanisławski, *Zbiór zadań maturalnych, cz. IV–VI*, Warszawa 1972–1979.
- J. Kozicki, *Zbiór zadań algebraicznych, klasy X–XI*, Warszawa 1960.
- P. S. Modenow, *Zbiór zadań z matematyki elementarnej*, Warszawa 1955.
- W. W. Prasolow, *Zadaczki po planimetrii*, Moskwa 1986.
- S. Serafin, G. Treliński, *Geometria. Zbiór zadań z matematyki elementarnej*, Warszawa 1976.

Indeks

A

Archimedes 216

B

Bernoulliego schemat prób 286

bryła platońska 181

C

Cauchy'ego definicja 105

Cavalieriego zasada 197

ciągłość funkcji 128

– lewostronna 130

– prawostronna 130

– w przedziale domkniętym 131

– w przedziale otwartym 130

–, badanie 133

D

dominanta 294

E

ekstremum lokalne 163

F

funkcja logarytmiczna 44

funkcja różniczkowalna 143

– w przedziale domkniętym 144

– w przedziale otwartym 143

–, ekstrema 162

–, interpretacja fizyczna 146

–, interpretacja geometryczna 145

–, monotoniczość 159

funkcja wykładnicza 34

funkcje trygonometryczne 79

–, przekształcanie wyrażeń 87

G

graniastosłup 186

– prawidłowy 187

– prosty 187

–, pole powierzchni bocznej 188

–, pole powierzchni całkowitej 188

–, przekątna 194

granica funkcji w nieskończoności 112

–, niewłaściwa 113

granica funkcji w punkcie 104

– lewostronna 109

– niewłaściwa 107

– prawostronna 111

– skończona 107

– właściwa 107

H

Heinego granica 104

I

iloraz różnicowy 143

K

kąt

– dwuścienny 179

–, miara 179

– liniowy 179

– nachylenia 145, 178

kombinacje 236

krzywa wykładnicza 34

kula 212

–, objętość 216

–, pole powierzchni 216

–, przekrój 212

L

logarytm 40

– dziesiętny 40

M

maksimum lokalne funkcji 162

mediana 294

minimum lokalne 163

N

Newtona symbol 234

nierówność

– koła 58

– logarytmiczna 47

- potęgowa 31
- trygonometryczna 95
- wykładnicza 36

O

- odchylenie standardowe 298
- odległość
 - dwóch punktów 53
 - punktu od prostej 67
- ogólne równanie prostej 60
- ostrosłup 190
 - prawidłowy 192
 - ścięty 192
 - , objętość 204
 - , pole powierzchni całkowitej 192
- otoczenie punktu 103

P

- permutacje 230
- pochodna funkcji 143
 - jednostronna 144
 - lewostronna 144
 - prawostronna 144
- pochyła 178
- położenie okręgu i prostej 70
- potęga 7
 - , funkcja potęgowa 26
 - , wykładnik niewymierny 22
 - , wykładnik wymierny 12
- prawdopodobieństwo
 - warunkowe 270
 - , klasyczna definicja 261,
 - , ogólna definicja 255,
 - , własności 256
- prosta na płaszczyźnie 60
- prostokątów 188
 - , objętość 197
- przekrój płaski 180
- przyrost
 - argumentu 143
 - wartości funkcji 143

- zmiennej niezależnej 143
- zmiennej zależnej 143

R

- rozmieszczenia 241
- rozstęp 297
- równanie
 - kierunkowe 62
 - logarytmiczne 47
 - okręgu 57
 - potęgowe 31
 - trygonometryczne 95
 - wykładnicze 36
- równoległości 188
- różniczkowanie 143
- rzut prostokątny 177

S

- sąsiedztwo punktu 103
- sfera 212
- siatka wielościanu 182
- sieczna okręgu 70
- silnia 229
- spodek wysokości 191
- stożek 211
 - obrotowy 211
 - , kąt rozwarcia 211
 - , objętość 216
 - , pole powierzchni bocznej 215
 - , pole powierzchni całkowitej 215
 - , tworząca 211
 - , styczna do okręgu 70
- sześcian 188
 - , objętość 197
- średnia
 - arytmetyczna 292
 - ważona 292

T

- tożsamości trygonometryczne, dowodzenie 92

trzy prostopadłe, twierdzenie 178

tangensów twierdzenie 95

W

walec 210

– obrotowy 209

–, objętość 214

–, pole powierzchni bocznej 214

–, pole powierzchni całkowitej 214

–, przekrój 210

wariacje

– bez powtórzeń 243

– z powtórzeniami 241

wariancja 297

wielościan 180

– foremny 181

– wypukły 181

współczynnik kierunkowy 61

wycinek kołowy, pole 215

Z

zdarzenie 250

– elementarne 248

– przeciwne 253,

–, alternatywa 252

–, iloczyn 252

–, koniunkcja 252

–, niezależne 279, 280

–, niezależność pary 278

–, różnica 252

–, suma 252

–, zależność pary 278

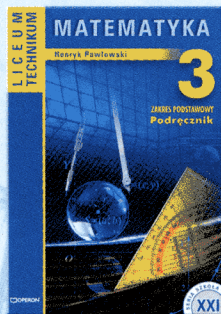
–, zupełny układ 273

Pozycje z zestawu do tomu 3:

■ Program nauczania
zakresy podstawowy
i rozszerzony



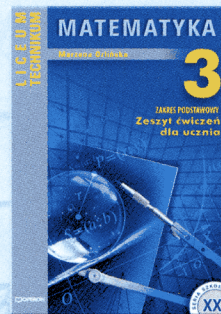
■ Podręcznik
zakres podstawowy



■ Podręcznik
zakres rozszerzony



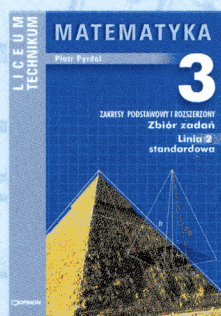
■ Zeszyt ćwiczeń dla ucznia
zakres podstawowy



■ Zbiór zadań linia 1
zakresy podstawowy
i rozszerzony



■ Zbiór zadań linia 2
zakresy podstawowy
i rozszerzony



■ Przewodnik dla nauczyciela
zakresy podstawowy
i rozszerzony



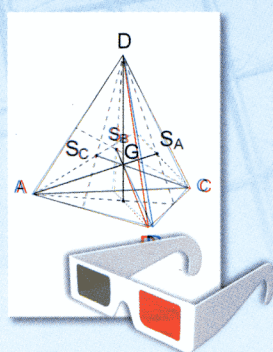
■ Wybrane scenariusze lekcji
zakresy podstawowy
i rozszerzony



■ Testy sprawdzające
zakresy podstawowy
i rozszerzony



■ Stereogramy część II
zakresy podstawowy
i rozszerzony



■ Filmy edukacyjne
zakresy podstawowy
i rozszerzony

